Untersuchungen über die Bahn des Doppelsterns Σ 208 = φ Ursae maioris

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

Von

Julius Dick
aus Mannheim

Tag der Promotion: 19. Dezember 1921

90

Untersuchungen über die Bahn des Doppelsterns Σ 208 = φ Ursae maioris

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Von

Julius Dick
aus Mannheim

Tag der Promotion: 19. Dezember 1921

Referenten:
Prof. Dr. Fritz Cohn
Prof. Dr. Paul Guthnick

Meinen lieben Eltern.

Die bisher entwickelten Methoden zur Bahnbestimmung visueller Doppelsterne lassen sich in zwei Hauptgruppen gliedern: eine erste, ältere Methoden umfassende, die es sich zur Aufgabe stellen, ähnlich dem Problem der Bahnbestimmung von Planeten die sieben Elemente eines Doppelsternsystems aus dem Mindestmaß von sieben voneinander unabhängigen Beobachtungsdaten abzuleiten, und eine zweite Gruppe, deren Methoden von vornherein das ganze vorhandene Beobachtungsmaterial zu verwerten trachten. Zur ersten Gruppe, deren sieben Daten mindestens einen Positionswinkel und mindestens eine Distanz enthalten müssen, da sonst die Bahnlage oder die Bahndimension unbestimmt bleibt, gehören die Methoden von Savary (Connaissance des temps 1830), Encke (Berliner astron. Jahrbuch 1832), Villarceau (Connaissance des temps 1852), Seeliger (Inaug.-Diss. 1872), Schwarzschild (Astron. Nachr. 124) und Klinkerfues (Theoret. Astron. 1871). Im Gegensatz zu den erstgenannten Verfahren, die heute wohl nur mehr theoretisches Interesse beanspruchen, praktisch aber wegen des Charakters der Doppelsternbeobachtungen kaum mehr in Frage kommen dürften, wird die Klinkerfuessche Methode, deren Grundlagen sechs Positionswinkel und eine Distanz bilden, auch heute noch, zumal bei geschickter Wahl dieser sechs Positionswinkel, gern angewandt und verspricht, insbesondere wenn eine größere Reihe von Beobachtungen vorliegt, mithin die zur ersten rohen Annäherung der dynamischen Elemente erforderliche graphische Darstellung der scheinbaren Ellipse mit größerer Genauigkeit durchgeführt werden kann, Erfolg, da sie nur die Differenzen der Positionswinkel verwendet und die Beobachtungsfehler sich hierdurch teilweise aufheben. Die zweite Gruppe von Methoden, die das gesamte Beobachtungsmaterial verwerten, kann man wiederum in graphische und analytische unterteilen, je nachdem sie die gezeichnete scheinbare Bahnellipse zur Grundlage der Bahnbestimmung wählen oder von deren analytischer Form ausgehen. Das älteste Verfahren der ersten Art ist das von J. Herschel (Memoirs of the Royal Astron. Soc. V) entwickelte, spätere sind die von Klinkerfues (Theor. Astron. 1871) und Zwiers (Astron. Nachr. 139). Aus der gezeichneten scheinbaren Ellipse werden die Elemente der Bahn entweder ebenfalls graphisch oder auch rechnerisch gefunden. Das Problem, aus der analytischen Form

der aus dem ganzen Beobachtungsmaterial gewonnenen Gleichung der scheinbaren Bahn die Elemente der wahren zu erhalten, fand seine Lösung durch J. Herschel (Memoirs of the R. Astr. Soc. XVIII), Kowalsky (Wissenschaftliche Schriften der Kasaner Universität 1873) und Seeliger (Schorr, Inaug.-Diss. 1889, und Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie I), der ihr die endgültige und für die Rechnung zweckmäßigste Formulierung gab. Eine Modifikation der Kowalskyschen Methode rührt von Glasenapp (Monthly Not. 49) her, der die analytische Form der Ellipsengleichung nicht unmittelbar aus den Beobachtungen, sondern aus der graphisch vorliegenden scheinbaren Bahn gewinnt.

Welcher dieser Methoden sich der Berechner einer Doppelsternbahn für ein bestimmtes Objekt bedienen wollte, blieb im Hinblick auf die durch das System bedingte Güte der Beobachtungen der Erfahrenheit und dem persönlichen Gefühl des Rechners überlassen. Es erschien daher nicht uninteressant, den Versuch zu unternehmen, das gleiche System unter Zugrundelegung des gleichen Beobachtungsmaterials nach verschiedenen Verfahren zu behandeln. Sollte dieser Versuch Aussicht auf Erfolg bieten, so mußte dazu ein enges System gewählt werden, da man nur bei den großen hier zu erwartenden Beobachtungsfehlern hoffen durfte, Unterschiede in dem Ergebnis zu finden, die durch den verschieden gearteten Einfluß und die verschiedenartige Ausmerzung der Fehler infolge des Charakters der Methode bedingt sind. Die Wahl fiel auf das System φ Urs. maj. = $O\Sigma$ 208 = β 5223 ($\alpha_{1900.0} = 9^h 45^m.3$, $\delta_{1900.0} = +54^0 31.'9$), das, außer von seinem Entdecker Otto Struve und Mädler während längerer Jahre, von den Beobachtern nur kurzfristig beobachtet ist, so daß die Fehler in verschiedenerlei Größe und Sinn auftreten, und dessen Messung als nur schwer zu bewerkstelligend von fast allen Beobachtern bezeichnet wird. Ich entschloß mich zur Berechnung der Bahn nach je einer Methode der ersten und der beiden Untergruppen der zweiten Gruppe und wählte als Beispiel der ersten Gruppe die Methode von Klinkerfues, als Beispiel der ersten Unterart der zweiten Gruppe die Methode von Zwiers, während die zweite Unterart in der von Seeliger gegebenen Form zur Anwendung kommen sollte. Da ich mutmaßen durfte, zumal im Hinblick auf die sogleich zu besprechenden bisherigen Bahnbestimmungen, daß bei einem so engen Objekt für eine erste Bahn eine graphische Methode große Aussichten bieten würde, begann ich mit der Zwiersschen Methode, schloß daran die Seeligersche und baute schließlich auf der für die Zwierssche Methode erforderlichen scheinbaren Ellipse die Methode von Klinkerfues auf.

1. Die bisherigen Bahnbestimmungen und die Beobachtungen.

T	U	e	i	Ω	ω	a	n	Berechner und Quellenangabe
	a		°	°	°	″	°	
1877.12	115.4	0.788	57.95	105.30	72.12	0.54	+ 3.12	Casey 1882, Astr. Nachr. 2417
1885.37	91.92	0.453	34.7	165.7	19.0	0.294	+ 3.9166	Glasenapp 1892, Astr. Nachr. 3119
1884 0	97.0	0.440	30.5	160.3	15.9	0.3443	+ 3.7114	See 1895, Evolution of the Stellar Systems
1882.46	99.70	0.4379	14.62	186.50	342.15	0.32	+ 3.6108	Doberck 1903, Astr. Nachr. 3912

Das Caseysche Elementensystem gilt für das Aequinoctium 1880.0, bei den übrigen fehlt die Angabe des Meridians, auf den sich die Knotenlänge bezieht. Die Bahn von Casey verwertet sämtliche Beobachtungen bis zum Jahre 1875, eine Angabe der benutzten Methode ist nicht vorhanden. Glasenapp zog die Beobachtungen bis zum Jahre 1892 heran und verwandte die von ihm ausgearbeitete, sich an die Kowalskysche anlehnende Methode. Das gleiche Verfahren scheint — eine direkte Angabe ist nicht gemacht — See unter Zugrundelegung aller Beobachtungen bis 1895 gewählt zu haben, während die von Doberck gegebene Bahn sich unter Benutzung der Herschelschen graphischen Methode auf den Beobachtungen bis zum Jahre 1902 aufbaut. Es ist bemerkenswert, daß zur Konstruktion der scheinbaren Ellipse Glasenapp und Doberck nicht die direkt beobachteten, sondern die aus dem Flächensatz mit Hilfe graphisch interpolierter Positionswinkel errechneten Distanzen verwandten.

Seit dem Jahre 1902 ist eine solche Fülle von guten und an starken Refraktoren angestellten Beobachtungen hinzugekommen, daß auch aus diesem Grunde eine Neuberechnung des Systems wünschenswert erschien. Bezüglich der Beobachtungen ist folgendes zu sagen. Mit Ausnahme der Beobachtung von Knott, die im Original nirgends zu finden ist, vielmehr einer brieflichen Mitteilung Knotts an Flammarion anläßlich dessen Katalogisierung von Doppelsternen zu entstammen scheint, wie die Einleitung zum Katalog vermuten läßt, sind sämtliche Beobachtungen den Originalpublikationen entnommen. Ergab sich zwischen einer vorläufigen Veröffentlichung in einer Zeitschrift und der endgültigen Publikation ein Unterschied, so sind die zweiten Angaben benutzt worden. Die Beobachtungen des Jahres 1920 verdanke ich der Liebenswürdigkeit von Herrn Geheimrat Struve, der auf meine Bitte hin das System mehrere Male in Babelsberg selbst beobachtete und durch die Herren Dr. Bernewitz und Pavel beobachten ließ. Trotz aller Bemühungen war es mir leider nicht möglich, die Lücke in der Beobachtungsreihe während der Kriegsjahre durch Einsicht in fremdländische Veröffentlichungen auszufüllen.

Die Angaben der Epochen wurden, soweit erforderlich, neu in Bruchteile des Besselschen Jahres umgerechnet, desgleichen wurden sämtliche Jahresmittel neu gebildet und zwar so, daß nur die Beobachtungen eines einzigen Jahres zu einem Mittel vereinigt wurden. Hierbei mußten wegen der nahezu gleichen Helligkeit beider Komponenten ($5^m.0$ und $5^m.6$) bisweilen im Positionswinkel Aenderungen um 180° erfolgen. Schließlich ist noch zu bemerken, daß die für die Positionswinkel gültigen Epochenmittel auch für die Distanzen beibehalten wurden, wenn durch das Fehlen einer Distanzmessung deren Epochenmittel gegenüber dem der Positionswinkel etwas geändert war. Es handelte sich stets nur um Unterschiede von wenigen Tausendsteln eines Jahres, die auf die Größe der Distanz ohne Einfluß sind.

Bei der endgültigen Zusammenstellung der Jahresmittel konnten Beobachtungen von Engelmann 1867.3 und Highton 1890.2 weggelassen werden, da Engelmann seiner Beobachtung selbst nur negativen Wert zuschreibt und die Hightonsche völlig aus dem Rahmen der ganzen Reihe herausfällt. Die so erhaltenen Jahresmittel der einzelnen Beobachter im Positionswinkel wurden daraufhin um den Betrag der Präzession

$$p_{1925.0} - p_t = n \sin \alpha \sec \delta \, (1925.0 - t)$$

auf das Aequinoctium 1925.0 reduziert.

Liste der Beobachtungen.

Epoche	Beobachter	Positionswinkel p	Präz.	$p_{1925.0}$	Zahl der Abde	Distanz ϱ	Zahl der Abde
1800 +		°	°	°		"	
42.355	O. Struve	4.45	+ 0.44	4.89	2	0.43	2
42.389	Mädler	4.25	.44	4.69	1	0.42	1
43.392	Mädler	5.38	.43	5.81	6	0.49	5
43.47	O. Struve	8.3	.43	8.73	1	0.45	1
44.26	O. Struve	6.8	.43	7.23	1	0.57	1
45.389	Mädler	11.03	.42	11.45	9	0.39	7
46.272	Mädler	15.39	.42	15.81	14	0.30	12
46.37	O. Struve	9.6	.42	10.02	1	0.49	1
47.120	Mädler	16.57	.41	16.98	7	0.29	4
47.41	O. Struve	12.2	.41	12.61	1	0.43	1
48.405	O. Struve	10.05	.41	10.46	2	0.41	2
50.390	O. Struve	14.90	.40	15.30	3	0.40	3
51.390	Mädler	27.18	.39	27.57	4	0.30	4
51.405	O. Struve	13.45	.39	13.84	2	0.39	2
52.385	O Struve	15.95	.39	16.34	2	0.39	2
52.399	Mädler	29.77	.39	30.16	4	0.25	4
53.403	O. Struve	16.37	.38	16.75	3	0.34	3
54.282	Dawes	25.89	.38	26.27	1	0.4	1
54.37	O Struve	22.9	.38	23.28	1	0.41	1
57.342	Secchi	30.6	.36	30.96	1	0.3	1
58.413	O. Struve	35.63	.35	35.98	3	0.37	3

Epoch p	Beobachter	Positionswinkel p	Präz.	$p_{1925.0}$	Zahl der Abde	Distanz ϱ	Zahl der Abde
1800 +		°	°	°		″	
59.37	Winnecke	43.9	+ 0.35	44.25	1	0.33	1
59.385	O. Struve	36.95	.35	37.30	2	0.36	2
61.40	Winnecke	55.0	.34	55.34	1	0.44	1
61.415	O. Struve	47.80	.34	48.14	2	0.35	2
62.39	O. Struve	45.7	.33	46.03	1	0.37	1
64.43	O. Struve	47.0	.32	47.32	1	0.27	1
66.27	Engelmann	43.2	.31	43.51	1	<0.4	1
66.40	Knott	45.9	.31	46.21		0.24	
66.42	O. Struve	46.4	.31	46.71	1	0.25	1
69.400	Dunér	45	.30	45.30	2		
70.425	Dunér	81.5	.29	81.79	2		
72.415	O. Struve	75.70	.28	75.98	2	0.24	2
73.44	Lindemann	87.5	.27	87.77	1		
73.453	O. Struve	94.23	.27	94.50	3		
73.47	H. Bruns	95.4	.27	95.67	1		
75.470	O. Struve	112.50	.26	112 76	2		
82.190	Engelmann	139.0	.23	139.23			
87.431	Schiaparelli	218.93	.20	219.13	4	0.23	4
89.310	O. Struve	224.1	.19	224.29	1		
89.310	H. Struve	230.9	.19	231.09	1		
92.132	Burnham	250.83	.17	251.00	3	0.24	3
92.310	Bigourdan	240.4	.17	240.57	1	0.29	1
93.362	Schiaparelli	249.55	.17	249.72	1	0.30	1
94.380	Bigourdan	261.25	.16	261.41	2		
95.383	Glasenapp	269.39	.16	269.55	2	0.35	1
95.731	See	276.17	.16	276.33	3	0.29	3
96.922	Aitken	267.23	.15	267.38	3	0 25	2
97.395	Comstock	276.07	.15	276.22	3	0.30	3
97.891	Hussey	271.10	.14	271.24	3	0.34	1
98.181	Hussey	277.73	.14	277.87	3	0.43	3
98.279	Comstock	280.65	.14	280.79	2	0.30	2
98.359	Lewis	275.7	.14	275.84	1	0 53	1
99.284	Comstock	276.90	.14	277.04	2	0.33	2
99.298	Bryant	283.33	.14	283.47	3	0.23	3
99.313	Brown	283.37	.14	283.51	3	0.39	3
99.405	Lewis	284.9	.14	285.04	1	0.27	1
99.406	Doolittle	286.53	.13	286.66	2	0.35	2
1900.315	Lewis	281.4	.13	281.53	1	0.18	1
00 367	Bryant	284.70	.13	284.83	2	0.29	2
01.297	Bryant	290.85	.13	290.98	4	0.32	3
01.417	Comstock	283.63	.13	283.76	3	0.36	3
02 313	Comstock	287.80	.12	287.92	2	0.35	2
02.317	Postelmann	288.20	.12	288.32	2	0.4	1
02.345	Bryant	288.55	.12	288.67	2	0.30	2
02.399	H. Struve	285.8	.12	285.92	1	0.4	1
02.474	Hussey	287.60	.12	287.72	3	0.32	3
03.23	Lohse	298.5	.12	298.62	1		
03.249	Bryant	292.40	.12	292.52	2	0.26	2
03.303	v. Biesbroeck	290.26	.12	290.38	5	0.31	5
03.326	Comstock	290.63	.12	290.75	3	0.30	3
03.363	Postelmann	288.7	.12	288.82	1		
03.379	Aitken	285.60	.12	285.72	2	0.30	2
03.409	H. Struve	283.4	+ 0.11	283.51	1	0.3	1

Epoche	Beobachter	Positionswinkel p	Präz.	$p_{1925\cdot0}$	Zahl der Abde	Distanz ϱ	Zahl der Abde
1900 +		°	°	°		"	
04.211	Postelmann	296.1	+ 0.11	296.21	1		
04.233	v. Biesbroeck	293.7	.11	293.81	1	0.36	1
05.353	Aitken	294.30	.10	294.46	2	0.32	2
07.15	Lohse	290.9	.09	290.99	1		
08.091	v. Biesbroeck	295.67	.09	295.76	3	0.37	3
08.388	Przybyllok	296.20	.09	296.29	4	0.4	2
09.174	v. Biesbroeck	302.50	.08	302.58	2	0.38	2
09.368	Doberck	304.18	.08	304.26	4	0.46	2
10.280	Bryant	307.7	.08	307.78	2	0.36	2
10.349	v. Biesbroeck	307.85	.08	307.93	2	0.44	2
11.256	Voûte	307.00	.07	307.07	5	0.36	5
11.344	v. Biesbroeck	310.0	.07	310.07	1	0.41	1
12.123	Aitken	308.50	.07	308.57	2	0.41	2
12.315	Bryant	311.0	.07	311.07	1	0.39	1
12.380	Doberck	301 00	.07	301.07	2	0.40	2
12.454	v. Biesbroeck	309.97	.07	310.04	3	0.50	3
13.310	Doberck	299.40	.06	299.46	2	0.60	2
20.501	Pavel	324.25	.02	324.27	2	0.43	2
20.502	H. Struve	321.30	.02	321.32	2	0.59	1
20.504	Bernewitz	326.13	+ 0.02	326.15	3	0.35	2

Da das System zur Zeit des Durchganges durch das Periastron wegen seiner kleinen Distanz gar nicht oder nur schwer getrennt werden konnte, fehlt es leider, wie die Liste erkennen läßt, an diesbezüglichen Beobachtungen, die die Festlegung dieses Punktes auf der scheinbaren Ellipse mehr gesichert hätten.

2. Bahnbestimmung nach Zwiers.

Das wesentliche Moment der Zwiersschen Methode liegt in der Einführung einer Hilfsellipse, die die Projektion des der wahren Ellipse umbeschriebenen Kreises mit dem Radius a auf die im Hauptstern tangential zur Sphäre liegende Projektionsebene darstellt. Ihre große Achse 2α ist gleich der großen Achse $2a$ der wahren Bahn und die Richtung von 2α ist die Richtung der Knotenlinie, da bei der Projektion alle Durchmesser des Kreises verkürzt werden mit Ausnahme dessen, der parallel zur Knotenlinie liegt Die stärkste durch den Neigungswinkel i zwischen Bahn und Projektionsebene bedingte Verkürzung erfährt der senkrecht zur Knotenlinie liegende Durchmesser, die kleine Achse β der Hilfsellipse ist also gleich $a \cos i$. Die Kenntnis von Richtung und Größe der Halbachsen der Hilfsellipse gibt mithin schon die Elemente a, i und Ω. Entsprechend der Konstruktion des der wahren Bahn umbeschriebenen Kreises durch Verlängerung ihrer Ordinaten im Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist die Hilfsellipse aus der Projektion

der wahren Bahn, der graphisch vorliegenden scheinbaren Ellipse, herzuleiten, indem alle Sehnen der letzteren, die parallel zur Projektion b_1 der kleinen Achse b der wahren Bahn sind, im Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ verlängert werden, wenn e die numerische Exzentrizität, das heißt das Verhältnis des Abstandes des Hauptsternes vom Mittelpunkt der Bahn zur großen Halbachse ist. Dieses Verhältnis ist für wahre und scheinbare Ellipse das gleiche und erfährt durch die Projektion keine Aenderung. b_1 endlich ist der konjugierte Halbmesser zur Projektion a_1 der großen Halbachse a der wahren Bahn, das heißt zu dem durch die Projektion des Hauptsternes gehenden Halbmesser der scheinbaren Bahn. Ist ω der Winkel zwischen Knotenlinie und großer Achse in der wahren Bahn, also der Abstand des Periastrons vom Knoten, so ist seine Projektion ω_1, der Winkel zwischen der großen Halbachse α der Hilfsellipse und der großen Halbachse a_1 der scheinbaren Ellipse, mit ω durch die Beziehung $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega_1 \sec i$ verbunden, so daß damit auch das letzte geometrische Element bekannt ist.

Diese kurze Skizzierung wird die folgenden Formeln verständlich machen. Ist a_1 der durch die Projektion des Hauptsternes gehende Halbmesser der scheinbaren Bahn, b_1 der hierzu konjugierte, χ_1 und χ_2 ihre Positionswinkel, wobei χ_2 so gewählt werden muß, daß $\chi_1 - \chi_2$ ein spitzer Winkel ist, schließlich d die Entfernung der Projektion des Hauptsternes vom Mittelpunkt der scheinbaren Bahn, so berechnet man die geometrischen Elemente nach folgendem Schema:

$$e = \frac{d}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\, b_1$$

$$\alpha + \beta = \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + 2\, a_1\, b_2 \sin(\chi_1 - \chi_2)}$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{a_1^2 + b_2^2 - 2\, a_1\, b_2 \sin(\chi_1 - \chi_2)}$$

$$a = \alpha$$

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\omega = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a_1^2}{a_1^2 - \beta^2}}$$

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tg}\omega$$

$$\delta\chi = \chi_1 - \omega_1$$

Von den beiden dynamischen Elementen T und U läßt sich die Durchgangszeit T durch das Periastron am einfachsten dadurch ermitteln, daß man durch Vergleich mit der Beobachtungsliste

feststellt, welcher Epoche der Positionswinkel χ_1 zugehört. Infolge der geringen Anzahl von Beobachtungen in der Nähe des Periastrons und der dadurch bedingten Unsicherheit der Interpolation im vorliegenden Falle habe ich das Verfahren vorgezogen, durch planimetrische Vermessung mehrerer Ellipsensektoren die Konstante der Flächengeschwindigkeit c zu bestimmen und die Differenz zwischen der bekannten Epoche eines Punktes der scheinbaren Bahn und dem gesuchten T als Quotient des in der Zwischenzeit zurückgelegten Sektors f und der Konstanten c zu ermitteln:

$$t - T = \frac{f}{c}$$

Ebenso habe ich, um möglichst den graphischen Charakter zu wahren und Rechnungen zu vermeiden, die Umlaufszeit U durch planimetrische Vermessung der Gesamtfläche F der scheinbaren Bahn und eines Sektors f zwischen zwei bekannten Epochen t_1 und t_2 berechnet:

$$U = \frac{F}{f}(t_2 - t_1)$$

Ich gehe jetzt zur Anwendung der Methode über. Um zunächst das Beobachtungsmaterial möglichst von Fehlern zufälliger und systematischer Art zu befreien und die graphische Konstruktion der scheinbaren Bahn zu erleichtern, habe ich die Jahresmittel der einzelnen Beobachter im Positionswinkel mit diesem als Ordinate und der Zeit als Abszisse in einem mittleren Maßstab ~~ es entsprachen 1 cm der Abszissenachse zwei Jahren und 1 cm der Ordinatenachse 5° — auf Millimeterpapier aufgetragen und eine Kurve hindurchgelegt, der dann von vier zu vier Jahren die unten wiedergegebenen Positionswinkel entnommen wurden. Ebenso verfuhr ich mit den Distanzen. Hier entsprach wieder 1 cm der Abszisse zwei Jahren und 1 cm der Ordinate 0".1. Hatte sich die Kurve der Positionswinkel trotz der zeitlich ungünstigen Verteilung der Beobachtungen verhältnismäßig scharf ziehen lassen, so war bei der Kurve der Distanzen der Willkürlichkeit mehr Raum gelassen, da die Beobachtungen stark hin und her springen und keine genaue Richtung erkennen lassen. Die so den beiden Kurven in äquidistanten Zeitintervallen entnommenen Positionen wurden nun zur Konstruktion einer scheinbaren Ellipse verwandt. Zur Auftragung der Winkel bediente ich mich hierbei der ihnen zugehörigen Sehnen des Einheitskreises, die sich in der Gaußschen Logarithmentafel vorfinden. Nachdem die scheinbare Bahn gezogen war, wurde mit Hilfe eines von Herrn Prof. Witt in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellten Polarplanimeters geprüft, ob die Ellipsensektoren dem Flächensatz genügen und gleichen Flächen-

inhalt aufweisen. Das negative Ergebnis der Prüfung schob ich auf die Ungenauigkeit der Distanzen und versuchte, unter Anwendung des Flächensatzes aus den durch numerische Differentiation gewonnenen Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ die Distanzen zu berechnen, ohne aber ein wesentlich besseres Ergebnis für die scheinbare Bahn zu erzielen. Bisher hatte ich die Ellipse möglichst streng den interpolierten Punkten anzupassen mich bemüht. Im Hinblick darauf, daß die Positionswinkel weit sicherer beobachtet und auch interpoliert sind als die Distanzen, behielt ich beim dritten Versuch zwar die Winkel streng bei, variierte aber unter geringen Veränderungen der Distanzen, die bei dem benutzten Maßstab von 2 cm gleich 0".1 nur einige Hundertstel Sekunden ausmachten, Exzentrizität und Lage der Ellipse so lange, bis ich trotz des auf größte Genauigkeit eingestellten Fahrarmes des Planimeters ein befriedigendes Ergebnis erzielte, das ich sogleich bei Berechnung von T mitzuteilen Gelegenheit haben werde. Die erhaltene scheinbare Bahn ist in der Anlage beigegeben. Um rückwärts mich zu überzeugen, daß die geänderten Distanzen nicht aus dem Rahmen der Beobachtungen herausfallen, habe ich sie mit den graphisch interpolierten verglichen. Die Kurve der der scheinbaren Bahn entnommenen Distanzen ϱ_k zeigt eine etwas stärkere Neigung als die der interpolierten ϱ_i und schneidet letztere je einmal vor und nach dem Periastron. Die Höchstmaße der Abweichung $\varrho_k - \varrho_i$ sind $+0''.04$ und $-0''.02$. Ich stelle die Grundlagen der Konstruktion noch einmal zusammen.

t	p	ϱ	t	p	ϱ
	°	"		°	"
1842.4	5.60	0.495	1886.4	196 10	0.167
46.4	10.10	.474	90.4	229.45	.183
50.4	15.70	.445	94.4	256.00	.218
54.4	22.75	.410	1898.4	275.00	.265
58.4	31.05	.370	1902.4	288.05	.310
62.4	40.90	.328	06.4	298 05	.353
66.4	52.80	.288	10.4	306.45	.396
70.4	68.25	.245	14.4	313.45	.433
74.4	88.45	.209	18.4	319.65	.465
78.4	116.05	.182	1922.4	325.00	0.493
1882.4	155.50	0.165			

Der im Maßstabe 2 cm entsprechend 0".1 gezeichneten scheinbaren Ellipse wurden die folgenden Daten entnommen:
$a_1 = 7.10$ cm $b_1 = 5.34$ cm $d = 3.83$ cm $\chi_1 = 166^0.937$ $\chi_2 = 79^0.212$
und damit in der angegebenen Weise die folgenden geometrischen Elemente gefunden:

$$e = 0.53944$$
$$a = 0''.35606$$
$$i = 27^0.480$$
$$\omega = 9^0.637$$
$$\Omega = 158^0.370$$

Entsprechend der Zweideutigkeit der Bestimmung der Knotenlänge können für Ω und ω auch die um 180° größeren Winkel gewählt werden. Doch entschied ich mich im Hinblick auf die früheren Berechnungen für die obigen Werte. Um die Durchgangszeit T durch das Periastron kennen zu lernen, bedarf man der Konstante der Flächengeschwindigkeit, nicht in absoluter Größe, sondern nur in Umdrehungsteilen der Mikrometerschraube des Planimeters. Die Vermessung der Ellipsensektoren zwischen den Positionen von vier zu vier Jahren wachsender Epochen ergab in Schraubenumdrehungen als Mittel je dreimaliger Umfahrungen des Sektors:

1842.4 bis 1846.4 :	$0^R.1213$	1882.4 bis 1886.4 :	$0^R.1243$
46.4 „ 50.4 :	.1360	86.4 „ 90.4 :	.1140
50.4 „ 54.4 :	.1500	90.4 „ 94.4 :	.1207
54.4 „ 58.4 :	.1483	94.4 „ 98.4 :	.1288
58.4 „ 62.4 :	.1390	1898.4 „ 1902.4 :	.1253
62.4 „ 66.4 :	.1290	02.4 „ 06.4 :	.1247
66.4 „ 70.4 :	.1263	06.4 „ 10.4 :	.1323
70.4 „ 74.4 :	.1173	10.4 „ 14.4 :	.1360
74.4 „ 78.4 :	.1173	14.4 „ 18.4 :	.1443
1878.4 bis 1882.4 :	0.1317	1918.4 bis 1922.4 :	0.1433

Aus dem Mittel dieser Werte, $0^R.130495$, folgt die Konstante der jährlichen Flächengeschwindigkeit zu $c = 0^R.032624$ in Einheiten der benutzten Planimeterskala. Dazu mag erwähnt werden, daß bei der gewählten Länge des Fahrarmes $0^R.001$ etwa 3 qmm entspricht. Nunmehr wurden, wieder durch dreimaliges Umfahren, die Ellipsensektoren vermessen, die von den Radienvektoren nach dem Periastron und den Positionen des Begleiters für 1878.4, 1882.4, 1886.4 und 1890.4 gebildet werden. Ihre Werte waren:

$0^R.0360$ $0^R.0893$ $0^R.1687$ $0^R.2020$

und ergaben nach Division durch c für $t - T$:

$-1^a.1035$ $+2^a.7373$ $-5^a.1711$ $+6^a.1917$

Das Mittel der vier so errechneten T ist

$$T = 1883.736.$$

Bei der Bestimmung von U mußte die Länge des Fahrarmes geändert werden, da es mit dem bisherigen kurzen Arm nicht

möglich war, die Ellipse zu umfahren. Einer Einheit der Planimeterskala entspricht jetzt also eine größere, doch nicht weiter ermittelte Fläche. Es wurden mit der Gesamtellipse, deren Flächeninhalt durch fünfmaliges Umfahren zu $1^R.9610$ gefunden wurde, die vier Sektoren zwischen den Positionen von 1842.4 und 1922.4, von 1850.4 und 1914.4, von 1862.4 und 1902.4 und schließlich von 1870.4 und 1894.4 verglichen. Die zugehörigen f sind im Mittel aus viermaligem Umfahren:

$1^R.3070$ $\quad$ $1^R.0325$ $\quad$ $0^R.6145$ $\quad$ $0^R.5628$

Das Mittel der sich ergebenden U ist

$$U = 124^a.74.$$

Ich stelle die so gewonnenen ersten Elemente nochmals zusammen.

$$\begin{aligned} T &= 1883.736 \\ U &= 124^a.74 \\ e &= 0.53944 \\ i &= 27^0.480 \\ \text{(I)} \qquad \Omega &= 158^0.370 \quad (1925.0) \\ \omega &= 9^0.637 \\ a &= 0''.35606 \\ n &= +\,2^0.8860 \end{aligned}$$

Die jährliche mittlere Bewegung n ist positiv, da die Bewegung des Begleiters im Sinne wachsender Positionswinkel erfolgt.

Eine Ephemeride, die auf Grund dieser Elemente zum Zwecke der Vergleichung mit den oben angegebenen Grundlagen der Konstruktion nach den bekannten Formeln:

$$E - e \sin E = n(t - T)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$\varrho \sin(p - \Omega) = r \cos i \sin(\omega + v)$$

$$\varrho \cos(p - \Omega) = r \cos(\omega + v)$$

gerechnet wurde, zeigte die folgenden Differenzen im Sinne Beobachtung minus Rechnung:

t	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$	t	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$
	°	"		°	"
1842.4	− 2.25	+ 0.009	1886.4	+ 1.83	+ 0.003
46.4	− 2.61	+ 0.011	90.4	− 1.76	− 0.001
50.4	− 2.43	+ 0.010	94.4	− 2.16	− 0.005
54.4	− 1.58	+ 0.006	1898.4	− 1.47	− 0.004
58.4	− 0.60	+ 0.001	1902.4	− 1.33	− 0.005
62.4	+ 0.31	− 0.003	06.4	− 1.02	− 0.005
66.4	+ 0.84	− 0.002	10.4	− 0 32	0.000
70.4	+ 1.17	− 0.004	14.4	+ 0 29	+ 0.002
74.4	+ 0.48	− 0.002	18.4	+ 0.98	+ 0.005
78.4	− 0.68	0.000	1922.4	+ 1.43	+ 0.008
1882.4	+ 2.05	− 0.001			

Sowohl der in beiden Koordinaten erkennbare Gang in den Differenzen als auch die für graphisch bereits ausgeglichene Beobachtungen noch zu bedeutenden Beträge der Abweichungen im Positionswinkel zeigen, daß die vorläufigen Elemente noch verbesserungsbedürftig sind. Wegen der größeren Sicherheit der Positionswinkelmessungen wurden nur die Differenzen $p_B - p_R$ zur Ausgleichung herangezogen und für jede der 21 Epochen die Bedingungsgleichungen gebildet:

$$d\,p = A\,d\,\Omega + B\,d\,i + C\,d\,\omega + D\,d\,e + G\,n\,d\,T + H\,d\,n$$

wo die Koeffizienten die ihnen im 20. Bande der Potsdamer Publikationen gegebene und für tabellarische Rechnung bequeme Bedeutung haben:

$$A = \frac{\partial p}{\partial \Omega} = +\,1$$

$$B = \frac{\partial p}{\partial i} = -\cos^2(p - \Omega)\,\mathrm{tg}\,(\omega + v)\sin i$$

$$C = \frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\cos^2(p - \Omega)}{\cos^2(v + \omega)}\cos i$$

$$D = \frac{\partial p}{\partial e} = C\,\frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e\cos E)^2}\,\sin E\left\{1 + \frac{1 - e\cos E}{1 - e^2}\right\}$$

$$G = \frac{\partial p}{n\,\partial T} = -\,C\,\frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e\cos E)^2}$$

$$H = \frac{\partial p}{\partial n} = -\,G\,(t - T)$$

Die große Halbachse a werde ich nicht differentiell verbessern, sondern mit Hilfe des endgültigen Wertes der sechs übrigen Elemente später eine Neuberechnung durchführen. Die Ausgleichung wurde nach dem Gesetz $\Sigma\,(\varrho\,d\,p)^2 = \mathrm{Min.}$ vorgenommen in Anbetracht der starken Exzentrizität der Bahn und der dadurch bedingten verschiedenen Wertung der Abweichungen $p_B - p_R$ je nach der Größe der Distanz. Ich konnte dies um so eher, als a durch die bisherige Rechnung so weit als gesichert angesehen werden darf, um für die Zwecke der Ausgleichung als fehlerfrei

anzusehende Werte von ϱ der Ephemeride entnehmen zu dürfen. Aus den mit ϱ multiplizierten und durch Einführung von

$$x = [9\ 68686]\, d\,\Omega$$
$$y = [9.04958]\, d\,i$$
$$z = [9.66242]\, d\,\omega$$
$$t = [9.86857]\, d\,e$$
$$u = [9.76060]\, n\,d\,T$$
$$v = [0.90588]\, d\,n$$

Einheit der rechten Seite: $[0.08196]^0$

homogen gemachten Bedingungsgleichungen folgen die Normalgleichungen:

$$+10.5715\ x - 0.7939_5\ y + 11.0202_5\ z - 0.3347_5\ t - 7.0983\ u - 0.6788\ v = -2.7195_5$$
$$-0.7939_5\ x + 8.9891\ y - 0.9911\ z + 7.4214\ t - 0.0262_5\ u + 8.4996\ v = +3.0644_5$$
$$+11.0202_5\ x - 0.9911\ y + 11.5389\ z - 0.6116_5\ t - 7.5869_5\ u - 0.9796\ v = -2.9056$$
$$-0.3347_5\ x + 7.4214\ y - 0.6116_5\ z + 12.9415\ t + 0.2173_5\ u + 11.1198_5\ v = +0.8156$$
$$-7.0983\ x - 0.0262_5\ y - 7.5869_5\ z + 0.2173_5\ t + 7.9137\ u + 0.3549_5\ v = +1.2017$$
$$-0.6788\ x + 8.4996\ y - 0.9796\ z + 11.1198_5\ t + 0.3549_5\ u + 10.9397\ v = +2.7555_5$$

Ihre Auflösung gibt zugleich mit den mittleren Fehlern:

$$d\,\Omega = -0^0.480 \pm 2^0.090$$
$$d\,i = -4^0.619 \pm 1^0.361$$
$$d\,\omega = -0^0.400 \pm 2^0.198$$
$$d\,e = -2^0.496 \pm 0^0.246 \qquad d\,e = -0.04199 \pm 0.00430$$
$$n\,d\,T = -0^0.463 \pm 0^0.206 \qquad d\,T = -0^a.160 \pm 0^a.0714$$
$$d\,n = +0^0.3094 \pm 0^0.0356$$

Die durch die Ausgleichung bewirkte Herabminderung der Fehlerquadrate von 4.2056 auf 0.3337, ausgedrückt allerdings in der zwecks Homogenisierung der Bedingungsgleichungen gewählten Einheit von [0.08196] Grad, läßt erhoffen, daß das neue Elementensystem eine bessere Darstellung der graphischen Normalorte geben wird. Es lautet:

$$T = 1883.576$$
$$U = 112^a.663$$
$$e = 0.49745$$
$$i = 22^0.861$$
$$\Omega = 157^0.890 \qquad (1925.0)$$
$$\omega = 9^0.237$$
$$n = +3^0.1954$$

und die Abweichungen zwischen den graphisch interpolierten und den hiermit berechneten Positionswinkeln sind jetzt die folgenden:

t	$p_B - p_R$	t	$p_B - p_R$		p_R
	°		°		°
1842.4	+ 0.97	1870.4	+ 0.51	1898.4	+ 0.25
46.4	— 0.02	74.4	— 0.40	1902.4	— 0.01
50.4	— 0.45	78.4	— 1.67	06.4	— 0.27
54.4	— 0.20	82.4	+ 0.93	10.4	— 0.19
58.4	+ 0.21	86.4	+ 1.20	14.4	— 0.23
62.4	+ 0.56	90.4	— 0.94	18.4	— 0.20
1866.4	+ 0.59	1894.4	— 0.46	1922.4	— 0.41

In der Tat sind die absoluten Beträge der Differenzen verkleinert, auch die Verteilung der Vorzeichen ist eine bessere geworden. Ich will daher bei diesem Ergebnis stehen bleiben und mich der Berechnung von a zuwenden. Hierzu ermittelt man für jede der 21 Beobachtungsepochen aus der Distanz ϱ den Radiusvektor r und aus ihm dann die Halbachse a:

$$r = \varrho \frac{\cos(p - \Omega)}{\cos(\omega + v)}$$

$$a = r \frac{1}{1 - e \cos E}$$

Da die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Positionswinkeln eine gute war, so habe ich diese Rechnung mit den der Ephemeride der Positionswinkel entnommenen Werten von $p - \Omega$, $\omega + v$ und E durchgeführt. Es ergab sich für die große Halbachse:

$$a = 0''.33623 \pm 0''.00277$$

mit einem mittleren Fehler der Gewichtseinheit von $\pm 0''.01270$. Mit ihm wurde die Ephemeride auf die Distanzen erweitert, die Vergleichung zwischen Beobachtung und Rechnung ist in der zweiten Spalte der folgenden Tabelle gegeben:

t	$\varrho_B - \varrho_R$ (I)	$\varrho_B - \varrho_R$ (II)	t	$\varrho_B - \varrho_R$ (I)	$\varrho_B - \varrho_R$ (II)
	"	"		"	"
1842.4	+ 0.027	+ 0.017	1886.4	— 0.004	— 0.008
46.4	+ 0.025	+ 0.016	90.4	— 0.010	— 0.014
50.4	+ 0.019	+ 0.011	94.4	— 0.013	— 0.017
54.4	+ 0.012	+ 0.004	1898.4	— 0.009	— 0.014
58.4	+ 0.003	— 0.004	1902.4	— 0.006	— 0.013
62.4	— 0.003	— 0.010	06.4	— 0.002	— 0.009
66.4	— 0.005	— 0.011	10.4	+ 0.006	— 0.002
70.4	— 0.009	— 0.014	14.4	+ 0.013	+ 0.005
74.4	— 0.007	— 0.012	18.4	+ 0.020	+ 0.011
78.4	— 0.005	— 0.008	1922.4	+ 0.027	+ 0.018
1882.4	— 0.005	— 0.009			

Die noch nicht völlig befriedigende Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Distanzen und der unschwer zu erkennende Gang in den Differenzen ließen den Versuch machen, allein durch differentielle Verbesserung von a unter Beibehaltung aller anderen Elemente eine bessere Darstellung zu erzielen. Aus

$$\varrho \sin (p - \Omega) = a (1 - e \cos E) \cos i \sin (\omega + v)$$
$$\varrho \cos (p - \Omega) = a (1 - e \cos E) \cos (\omega + v)$$

folgt durch Differentiation allein nach a:

$$d\varrho = (1 - e \cos E) \cos i \frac{\sin (\omega + v)}{\sin (p - \Omega)} d a$$
$$d\varrho = (1 - e \cos E) \frac{\cos (\omega + v)}{\cos (p - \Omega)} d a$$

wobei sich die Anwendung der einen oder anderen Formel empfiehlt, je nachdem $\sin (p - \Omega)$ oder $\cos (p - \Omega)$ der Einheit näher liegt.

Es ergab sich die Korrektion:

$$d a = + 0''.00670 \pm 0''.00259$$

mit einem mittleren Fehler der Gewichtseinheit von $\pm 0''.01200$. Der verbesserte Wert der Halbachse wird mithin:

$$a = 0''.34293 \pm 0''.00259$$

Die zugehörigen Abweichungen $(\varrho_B - \varrho_R)_{II}$ sind in der dritten Spalte der vorangehenden Tabelle aufgeführt. Zwar läßt die Vorzeichenverteilung noch zu wünschen übrig, doch ist hinsichtlich der absoluten Größe eine gleichmäßigere Verteilung der positiven und negativen Differenzen vorhanden. Auch mit den Beträgen, die nirgends $0''.02$ erreichen, glaube ich mich bescheiden zu dürfen.

Ich stelle die verbesserten Elemente nochmals zusammen.

(II)
$$T = 1883.576$$
$$U = 112^{a}.663$$
$$e = 0.49745$$
$$i = 22^{0}.861$$
$$\Omega = 157^{0}.890 \quad (1925.0)$$
$$\omega = 9^{0}.237$$
$$a = 0''.34293$$
$$n = + 3^{0}.1954$$

Nachdem so eine befriedigende Darstellung der graphischen Normalorte durch die Elemente erzielt ist, bleibt ein Gleiches für die Beobachtungen selbst nachzuweisen. Als Grundlage diente die von zwei zu zwei Jahren gerechnete Ephemeride, die für die Beobachtungsepochen interpoliert wurde. Die folgende Tabelle gibt die Vergleichung wieder:

t	Beobachter	$p_B - p_E$	$\varrho_B - \varrho_E$	t	Beobachter	$p_B - p_E$	$\varrho_B - \varrho_E$
		°	"			°	"
1842.355	O. Σ.	+ 0.32	— 0.05	1896.922	A	— 1.32	— 0.01
42.389	Ma	+ 0.07	— 0.06	97.395	Com	+ 5.50	+ 0.03
43.392	Ma	— 0.14	+ 0.02	97.891	Hu	— 1.51	+ 0.07
43.47	O. Σ.	+ 2.68	— 0.02	98.181	Hu	+ 3.97	+ 0.15
44.26	O. Σ.	+ 0.11	+ 0.10	98.279	Com	+ 6.51	+ 0.02
45.389	Ma	+ 2.77	— 0.07	98.359	L	+ 1.25	+ 0.25
46.272	Ma	+ 5.88	— 0.16	99.284	Com	— 0.99	+ 0.04
46.37	O. Σ.	— 0.05	+ 0.03	99.298	Br	+ 5.38	— 0.06
47.120	Ma	+ 5.82	— 0.16	99.313	Bro	+ 5.37	+ 0.10
47.41	O. Σ.	+ 1.03	— 0.02	99.405	L	+ 6.57	— 0.02
48.405	O. Σ.	— 2.60	— 0.04	1899.406	Doo	+ 8.18	+ 0.06
50.390	O. Σ.	— 0.83	— 0.04	1900.315	L	— 0.08	— 0.12
51.390	Ma	+ 9.82	— 0.13	00.367	Br	+ 3.05	— 0.01
51.405	O. Σ.	— 3.93	— 0.04	01.297	Br	+ 6.22	+ 0.01
52.385	O. Σ.	— 3.07	— 0.03	01.417	Com	— 1.37	+ 0.05
52.399	Ma	+10.73	— 0.17	02.313	Com	+ 0.11	+ 0.03
53.403	O. Σ.	— 4.41	— 0.07	02.317	Postelmann	+ 0.50	+ 0.08
54.282	Da	+ 3 54	— 0.01	02.345	Br	+ 0.76	— 0.02
54.37	O. Σ.	+ 0.39	0.00	02.399	H. Σ.	— 2.14	+ 0.08
57.342	Se	+ 2.33	— 0.08	02.474	Hu	— 0.56	0.00
58.413	O. Σ.	+ 5.11	0.00	03.23	Lo	+ 8.22	
59.37	Winn.	+11.27	— 0.03	03.249	Br	+ 2.07	— 0.07
59.385	O. Σ.	+ 4.29	0.00	03.303	Biesbr	— 0.22	— 0.02
61.40	Winn.	+17.56	+ 0.09	03.326	Com	+ 0.09	— 0.03
61.415	O. Σ.	+10.32	0.00	03.363	Postelmann	— 1.94	
62.39	O. Σ.	+ 5.72	+ 0.03	03.379	A	— 5.08	— 0.03
64.43	O. Σ.	+ 1.32	— 0.05	03.409	H. Σ.	— 7.37	— 0.03
66.27	En	— 8.27		04.211	Postelmann	+ 3.20	
66.40	Knott	— 6.00	— 0.06	04.233	Biesbr	+ 0.75	+ 0.02
66.42	O. Σ.	— 5.57	— 0.05	05.353	A	— 1.46	— 0.03
69.400	Du	—18.12		07.15	Lo	— 9.02	
70.425	Du	+13.93	0.00	08.091	Biesbr	— 6.27	— 0.01
72.415	O. Σ.	— 1.56		08.388	Prz	— 6.37	+ 0.02
73.44	Lindemann	+ 4.61		09.174	Biesbr	— 1.67	— 0.01
73.453	O. Σ.	+11 27		09.368	Do	— 0.38	+ 0.07
73.47	Bruns	+12.35		10.280	Br	+ 1.37	— 0.04
75.470	O. Σ.	+17.02		10.349	Biesbr	+ 1.39	+ 0.04
82.190	En	—13.26		11.256	Voûte	— 1.17	— 0.04
87.431	Sp	+14.30	+ 0.05	11.344	Biesbr	+ 1.67	0.00
89.310	O. Σ.	+ 2.68		12.123	A	— 1.23	0.00
89.310	H. Σ.	+ 9.48		12.315	Br	+ 0.93	— 0.02
92.132	β	+ 8.18	+ 0.03	12.380	Do	— 9.19	— 0.01
92.310	Big	— 3.43	+ 0.08	12.454	Biesbr	— 0.34	+ 0.09
93.362	Sp	— 0.85	+ 0.08	13.310	Do	—12.40	+ 0.18
94.380	Big	+ 5.05		20.501	Pavel	+ 1.44	— 0.04
95.383	Gp	+ 7.99	+ 0.10	20.502	H. Σ.	— 1.52	+ 0.12
1895.731	See	+13.07	+ 0.04	1920.504	Bern.	+ 3.31	— 0.12

Die Liste zeigt im Positionswinkel 56 positive und 38 negative Abweichungen bei 44 Zeichenwechseln, in der Distanz 31 positive, 40 negative und 8 Nullabweichungen bei 32 Zeichenwechseln. Auch hinsichtlich der Größe der Differenzen ist das Ergebnis der Vergleichung als befriedigend zu bezeichnen, wenn man die ge-

ringen Distanzen des Systems berücksichtigt. Dadurch werden die auf den ersten Blick zu groß erscheinenden Abweichungen in der Nähe des Periastrons verständlich, die sich auch von den übrigen Differenzen nicht mehr so stark unterscheiden, wenn sie auf den größten Kreis reduziert werden. Eine diesbezügliche Tabelle wird später gegeben werden.

3. Die analytische Methode.

Als Gegenstück zur graphischen Methode wende ich mich jetzt zur rein rechnerischen Behandlung des Problems. Da es mir darauf ankam, Unterschiede in der Verwertung des Beobachtungsmaterials seitens der verschiedenen Methoden kennen zu lernen, so durfte ich hier nicht die bisher benutzten graphisch ausgeglichenen Normalorte zugrunde legen, sondern mußte unmittelbar auf die Beobachtungen selbst aufbauen, nachdem diese allerdings, soweit angängig, um systematische Fehler verbessert waren.

Zuvor eine kurze Skizzierung der Methode. Man geht aus von einem in der Projektionsebene liegenden rechtwinkeligen Koordinatensystem, dessen Abszissenachse mit der Richtung des Meridians, positiv nach Norden gezählt, zusammenfällt. Statt der graphisch konstruierten scheinbaren Ellipse bedient man sich ihrer analytischen Form, die in diesem System

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0$$

lautet, und berechnet die unbekannten Koeffizienten β, γ, δ, ε, ζ durch eine Ausgleichung aller vollständigen Beobachtungen, deren jede die Abszisse

$$x = \varrho \cos p \qquad \text{und} \qquad y = \varrho \sin p$$

als Ordinate liefert. Diese Gleichung der scheinbaren Bahn transformiert man durch eine Drehung des Koordinatensystems um den Visionsradius als Achse im Betrage des Winkels Ω, sodann durch eine weitere um die neue Ordinatenachse um den Winkel i in die Gleichung der wahren Bahn in einem System also, dessen xy-Ebene die wahre Bahnebene ist und dessen Abszissenachse in der Richtung der Knotenlinie liegt. Mit dieser Beziehung vergleicht man eine zweite Form der wahren Ellipse, indem man ein im Brennpunkt mit der großen Achse als Abszissenachse gewähltes System um den Winkel ω dreht, so daß beide Systeme zusammenfallen. Die so gewonnenen Gleichungen der wahren Bahn geben durch Vergleichung die Möglichkeit der Bestimmung der geometrischen Elemente. Die beiden dynamischen bestimmt man dann mit Hilfe der Keplerschen Gleichung, nachdem man aus jeder Beobachtung mit den bekannten geometrischen Elementen

die exzentrische Anomalie berechnet hat. Ich gebe die Formeln in der ihnen von Seeliger gegebenen Form wieder.

$$x = \varrho \cos p \qquad y = \varrho \sin p$$

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon x + 2\zeta y - 1 = 0$$

$$\mu = \gamma + \zeta^2$$

$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$

$$\lambda = \delta + \zeta\varepsilon$$

$$\operatorname{tg} 2\Omega = -\frac{2\lambda}{\mu - \nu}$$

$$\frac{1}{\overline{p}^2} = \frac{1}{2}(\mu + \nu) + \frac{1}{2}(\nu - \mu)\cos 2\Omega + \lambda \sin 2\Omega$$

$$\operatorname{tg}^2 i = (\mu + \nu)\overline{p}^2 - 2 \qquad (\overline{p} = \text{Parameter})$$

$$e \sin \omega = \overline{p}(-\varepsilon \sin\Omega + \zeta\cos\Omega)\cos i$$

$$e \cos \omega = \overline{p}(+\varepsilon\cos\Omega + \zeta \sin\Omega)$$

$$a = \frac{\overline{p}}{1 - e^2}$$

$$\operatorname{tg}(v + \omega) = \frac{\operatorname{tg}(p - \Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$$

$$\frac{2\pi}{U}(t - T) = E - e \sin E$$

Es ist wesentlich, daß in der Gleichung der scheinbaren Bahn β, γ und $\beta\gamma - \delta^2$ positiv sein müssen, damit die Kurve zweiten Grades eine Ellipse wird.

Um die den Beobachtungen anhaftenden systematischen Fehler von vornherein soweit als möglich zu berücksichtigen und unschädlich zu machen, wurden an die eingangs aufgeführten Jahresmittel der einzelnen Beobachter provisorische Korrektionen für systematische Fehler angebracht. Sie wurden für Dawes und Secchi der Einleitung zum IX. Bande der Pulkowaer Beobachtungen entnommen, für Dunér, H. Struve, Schiaparelli, Hussey, Comstock, Lohse, v. Biesbroeck und Przybyllok dem IV. Bande der Annalen der Straßburger Sternwarte nach den Untersuchungen von Wirtz und schließlich für Aitken, Burnham, Doolittle und Lewis der Jonckheereschen Zusammenstellung im Journal astronomique. Wo, wie in den beiden ersterwähnten Publikationen, die systematischen Fehler in ihrer Abhängigkeit von der Distanz gegeben sind, habe ich diese Funktion für Positionswinkel und Distanz graphisch aufgetragen und die systematischen Fehler für die mittlere Distanz 0″.33 von $O\Sigma$ 208 extrapoliert. Durch die Extrapolation, die erforderlich wurde, weil die angeführten kleinsten Distanzen stets größer als 0″.33 waren, treten zwar Unsicherheiten

ein, denen ich aber bei dem an und für sich schon problematischen Charakter der Korrektionen keine Bedeutung beigemessen habe. Die benutzten provisorischen Verbesserungen sind für Positionswinkel und Distanz:

Dawes	+ 2.31	— 0."140	(nach O. Struve)
Secchi	+ 0.55	+ 0.098	(nach O. Struve)
Dunér	+ 0.12	+ 0.055	(nach Wirtz)
Schiaparelli	+ 0.08	— 0.027	(nach Wirtz)
H. Struve	— 0.57	+ 0.046	(nach Wirtz)
Burnham	— 0.04	+ 0.01	(nach Jonckheere)
Aitken	+ 0.67	— 0.01	(nach Jonckheere)
Comstock	+ 2.03	+ 0.084	(nach Wirtz)
Hussey	— 1.82	+ 0.037	(nach Wirtz)
Lewis	— 0.33	+ 0.02	(nach Jonckheere)
Doolittle	— 0.15	— 0.05	(nach Jonckheere)
Lohse	+ 4.81	— 0.155	(nach Wirtz)
v. Biesbroeck	— 0.03	+ 0.040	(nach Wirtz)
Przybyllok	+ 0.85	+ 0.058	(nach Wirtz)

Hierzu tritt noch für Postelmann eine provisorische Verbesserung von $+ 0^{0}.33$, die aus der Angabe in der Einleitung zu den Königsberger Beobachtungen Abtlg. 43, II folgt, daß zwischen den Messungen von H. Struve und Postelmann der Zusammenhang $d\,p_{\mathrm{H.\Sigma.}} - d\,p_{P} = - 0^{0}.9$ bestehe. Für O. Struve sind die von ihm selbst gegebenen Korrektionen unverändert beibehalten worden, indem die in dem »Supplément au Vol. IX« veröffentlichten mit den Korrektionen versehenen Beobachtungen zugrunde gelegt wurden. Eine Nichtänderung empfahl sich schon deshalb, weil die obigen Verbesserungen mit Ausnahme der von Jonckheere berechneten sich auf den O. Struveschen aufbauen und an dessen System angeschlossen sind.

Die Gewichtsfestsetzung erfolgte in geringfügiger Abänderung des von Seeliger in seiner zweiten Abhandlung über ζ Cancri gemachten und von Großmann in seiner Dissertation über η Coronae borealis etwas erweiterten Verfahrens in folgender Weise:

Anzahl der Abende	1	2	3	4	5	> 5
Beobachter mit bekannter Korr. . . .	2	3	4	5	5	5·5
Andere Beobachter	1	1.5	2	2.5	2.5	3

Zwar dürfte die dort vorgeschlagene Gewichtsverdoppelung für Beobachter mit bekannter Korrektion gegenüber den anderen eine gewisse Ueberschätzung dieser Verbesserung darstellen, doch habe ich sie beibehalten, da sie wohl dem Bestreben entspringt, möglichst mit ganzzahligen Gewichten arbeiten zu können.

Nachdem an die Jahresmittel der einzelnen Beobachter die provisorischen Korrektionen angebracht waren, wurden nach Maßgabe dieser Gewichtsbestimmung Gasamtjahresmittel gebildet. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Beobachtungen 1889.310 $O\,\Sigma$ und 1920.502 $H\,\Sigma$ im Gegensatz zu den übrigen Beobachtungen von O. Struve und H. Struve keine Verbesserungen enthalten, erstere mangels Angabe der verbesserten Beobachtung, letztere, da ich die Wirtzsche aus früheren Beobachtungsreihen ermittelte Korrektion nicht auf eine zeitlich so entfernte und an einem anderen Instrument angestellte Messung anwenden wollte. Ich gebe nunmehr die Liste der als Normalorte anzusehenden Gesamtjahresmittel mit den Gewichten g_p und g_ϱ für Positionswinkel und Distanz.

t	p	g_p	ϱ	g_ϱ	t	p	g_p	ϱ	g_ϱ
	°		″			°		″	
1842.364	4.840	4	0.428	4	1887.431	219.21	5	0.203	5
43.423	6.978	5	0.472	4.5	89.310	228.443	3		
44.26	7.23	2	0.57	2	92.168	248.882	5	0.258	5
45.389	11.45	3	0.39	3	93.362	249.80	2	0.273	2
46.311	13.494	5	0.376	5	94.380	261.41	1.5		
47.236	15.232	5	0.352	4.5	95.582	273.424	3.5	0.310	3
48.405	10.46	3	0.41	3	96.922	268.05	4	0.24	3
50.390	15.30	4	0.40	4	97.643	273.835	8	0.382	6
51.398	20.081	5.5	0.349	5.5	98.253	278.187	9	0.458	9
52.391	22.622	5.5	0.326	5.5	1899.342	283.343	12	0.330	12
53.403	16.75	4	0.34	4	1900.337	282.756	3.5	0.239	3.5
54.326	25.930	4	0.335	4	01.371	287.786	6.5	0.403	6
57.342	31.51	2	0.398	2	02.378	287.637	13.5	0.389	11.5
58.413	35.98	4	0.37	4	03.325	290.865	19.5	0.338	15.5
59.381	39.038	4	0.352	4	04.222	295.160	4	0.400	2
61.411	49.940	4	0.372	4	05.353	295.07	3	0.31	3
62.39	46.03	2	0.37	2	07.15	295.80	2		
64.43	47.32	2	0.27	2	08.256	296.513	9	0.431	7
66.378	45.785	4	0.247	3	09.262	303.327	5.5	0.433	4.5
69.400	45.42	3			10.326	307.863	4.5	0.440	4.5
70.425	81.91	3			11.295	308.390	4.5	0.400	4.5
72.415	75.98	3	0.24	3	12.323	308.466	9.5	0.458	9.5
73.454	93.573	6			13.310	299.46	1.5	0.60	1.5
75.470	112.76	3			1920.502	324.137	5	0.440	4
1882.190	139.23	1							

Damit kann an die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die scheinbare Bahn herangegangen werden. Ich hatte zunächst den Versuch unternommen, mittels des Fehlerübertragungsgesetzes aus den Gewichten g_p und g_ϱ für jede Gleichung Gewichte g_f zu berechnen und eine gewichtete Ausgleichung durchzuführen. Dies erforderte aber eine vorherige Kenntnis der Unbekannten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, die ich mir durch strenge Auflösung von aus fünf Beobachtungen hervorgehenden Gleichungen verschaffte, für die

g_p und g_ϱ gleiche Werte hatten. Die aus der Ausgleichung hervorgehenden Unbekannten wichen jedoch so stark von den provisorischen ab, daß ich von dem Versuch Abstand nahm. Seinen Grund hat dies wohl in den trotz gleicher g_p und g_ϱ ungleichen g_f der fünf herausgegriffenen Beziehungen, da in den numerisch ziemlich umständlich zu berechnenden Ausdruck von g_f auch x, y und ϱ eintreten, die für die fünf Epochen stark verschiedene Werte hatten. Ich gab daher sämtlichen Bedingungsgleichungen das gleiche Gewicht und gedachte der Verschiedenheit von g_p und g_ϱ erst bei der Bahnverbesserung Rechnung zu tragen.

Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen wurden die Jahresmittel mit nicht vollständigen Beobachtungen unberücksichtigt gelassen. Da sie zum größten Teil in der Nähe des Periastrons liegen, wo die Winkeländerung nicht mehr als linear mit der Zeit laufend betrachtet werden kann, wollte ich diese Jahresmittel nicht mehr mit solchen vereinigen, für die ϱ bekannt ist. Auch den Weg der graphischen Interpolation für ϱ habe ich nicht beschritten, da es mir bei dieser Methode um eine rein numerische Lösung des Problems zu tun war. Ich gebe nachfolgend die aus den 41 vollständigen Normalorten resultierenden Bedingungsgleichungen mit logarithmischen Koeffizienten.

9.25978	β + 7.11530	γ + 8.18754	2δ + 9.62989	2ε + 8.55765	2ζ =	1
9.34132	7.51696	8.42919	9.67071	8.75848		1
9 50480	7.71146	8.60813	9 75240	8.85573		1
9.16466	7.77770	8.47118	9.58233	8.88885		1
9.12606	7.88638	8.50622	9.56303	8.94319		1
9.06202	7.93210	8.49706	9.53101	8.96605		1
9.21100	7.74354	8.47727	9.60550	8.87177		1
9.17278	8.04692	8.60985	9.58639	9.02346		1
9.03118	8.15712	8.59415	9.51559	9.07856		1
8.95690	8.19658	8.57674	9.47845	9.09829		1
9.02530	7.98234	8.50382	9 51265	8.99117		1
8.95792	8.33158	8.64475	9.47896	9.16579		1
9.06120	8.63618	8.84869	9.53060	9.31809		1
8.95254	8.67442	8.81348	9.47627	9.33721		1
8.87362	8.69154	8.78258	9 43681	9.34577		1
8.75830	8.90882	8.83356	9.37915	9.45441		1
8.81948	8.85070	8.83509	9.40974	9.42535		1
8 52506	8.59548	8.56027	9.26253	9.29774		1
8.47230	8.49611	8.48420_5	9.23615	9.24805_5		1
7.52898	8.73416	8.13157	8.76449	9.36708		1
8.39342	8.21666	8.30504	9.19671 n	9.10833 n		1
7.93654	8.76286	8.34970	8.96827 n	9.38143 n		1
7.94870	8.81718	8 38294	8 97435 n	9.40859 n		1
6.53502	8.98118	7.75810 n	8.26751	9.49059 n		1
5.82408	8.75992	7.29200	7.91204 n	9.37996 n		1
6.81475	9.16217	7.98846 n	8.40737_5	9.58108_5 n		1
7.62878	9.31284	8.47081 n	8.81439	9.65642 n		1
7.76342	9.01324	8.38833 n	8.88171	9.50662 n		1
7.44480	8.73510	8.08995 n	8.72240	9.36755 n		1
8.18054	9.16808	8 67431 n	9.09027	9.58404 n		1

8.14274 β +	9.13808 γ +	8.64041 n 2δ +	9.07137	2ε +	9.56904 n 2ζ = 1
8.16114	8.99893	8.58003$_5$ n	9.08057		9.49946$_5$ n 1
8.46120	9.11754	8.78937 n	9.23060		9.55877 n 1
8.23688	8.89678	8.56683 n	9.11844		9.44839 n 1
8.56841	9.17244	8.87042$_5$ n	9.28420$_5$		9.58622 n 1
8.75278	9.11693	8.93485$_5$ n	9.37639		9.55846$_5$ n 1
8.86286	9.08162	8.97224 n	9.43143		9.54081 n 1
8.79032	8.99254	8.89143 n	9.39516		9.49627 n 1
8.90938	9.10924	9.00931 n	9.45469		9.55462 n 1
8.93990	9.43604	9.18797 n	9.46995		9.71802 n 1
9.10432	8.82246	8.96339 n	9.55216		9.41123 n 1

Um die Bedingungsgleichungen homogen zu machen, wurde substituiert:

$$B = 9.50480\,\beta$$
$$\Gamma = 9.43604\,\gamma$$
$$\Delta = 9.18797\,2\delta$$
$$E = 9.75240\,2\varepsilon$$
$$Z = 9.71802\,2\zeta$$

Damit folgen die Normalgleichungen:

3.9805 B	+1.4103 Γ	+0.6611 Δ	+5.7433 E	+ 0.1686$_5$ Z	= + 9.2616
1.4103	+4.7675$_5$	−2.6520	+3.1481	− 5.2772	= +10.5850
0.6611	−2.6520	+5.1777	+0.3225$_5$	+ 6.0319	= − 0.6993
5.7433	+3.1481	+0.3225$_5$	+9.2617$_5$	− 0.3650	= +15.6473
0.1686$_5$	−5.2772	+6.0319	−0.3650	+10.5846$_5$	= − 7.5120$_5$

Sie ergeben für die gesuchten Koeffizienten, wieder in Logarithmen, die Lösungen:

$$\lg \beta = 9.65724_5\,n$$
$$\lg \gamma = 0.69018_5$$
$$\lg \delta = 0.67344$$
$$\lg \varepsilon = 0.04062_5$$
$$\lg \zeta = 9.89803\,n$$

Da β, ebenso $\beta\gamma - \delta^2$ negativ werden, ist die für die Ellipse wesentliche Bedingung nicht erfüllt und eine Bahnbestimmung auf diesem Wege nicht möglich.

Man könnte geneigt sein, dieses negative Ergebnis der Nichteinführung besonderer Gewichte zuzuschreiben, und versuchen, auf dem zuerst eingeschlagenen, aus dem angegebenen Grunde aber wieder verlassenen Wege unter sukzessiver Näherung so lange fortzuschreiten, bis die angenommenen und die durch die gewichtete Ausgleichung erhaltenen Werte der Unbekannten übereinstimmen. Abgesehen aber von der Frage, ob und wie dieses Verfahren konvergiert, scheint mir dieser Weg in der Erwägung nicht gangbar, daß jede Gewichtsfestsetzung mit einer mehr oder minder großen Willkürlichkeit behaftet ist. Würde daher eine gewichtete Ausgleichung ein positives Ergebnis zeitigen und eine

Bahnbestimmung ermöglichen, so würde damit noch nicht der Beweis für die Vollgültigkeit des Resultates erbracht, sondern dieses wegen des willkürlichen Charakters der Gewichtsrechnung als mehr zufällig erzielt zu betrachten sein. Aus diesem Grunde habe ich von weiteren Versuchen in dieser Richtung abgesehen.

Die Erklärung für das überraschende Ergebnis darf man wohl darin suchen, daß die Methode an die Fehlerfreiheit der Beobachtungen größere Anforderungen stellt, als sie das vorliegende Beispiel erfüllt. Auch wurde bereits hervorgehoben, daß, von der unsicheren Engelmannschen Beobachtung abgesehen, in der Nähe des Periastrons ein Bogen der scheinbaren Ellipse von über 100° von Beobachtungen völlig entblößt ist. Die beiderseitige Zusammenballung der Messungen bewirkt offenbar, daß die Punkte, die man graphisch ohne Bedenken anderer konstruktiver Möglichkeiten aus dynamischen Gründen durch einen Ellipsenbogen zu verbinden sucht, auch durch einen langgestreckten Hyperbelbogen approximiert werden können. Hierzu kommt, daß die Methode das Kriterium der Erfüllung des Flächensatzes durch die scheinbare Bahn bei der Ausgleichung unbeachtet läßt, wenn zu ihr die Beobachtungen unmittelbar herangezogen werden. Seine Berücksichtigung könnte nur so erfolgen, daß man sich durch Ausgleichung des gesamten Materials an Positionswinkelmessungen eine Interpolationsformel für p nach wachsenden Potenzen der Zeit verschafft, hiernach für jede Epoche den Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ bildet und durch Vergleich mit den gemessenen Distanzen einen mittleren Wert der Flächenkonstante $\varrho^2 \frac{dp}{dt}$ sucht, aus der dann rückwärts die Distanzen ϱ für jede Epoche berechnet werden können. Dieses künstlich gewonnene Beobachtungsmaterial ist dann wieder der Ausgleichung zu unterwerfen, da wegen des benutzten Mittelwertes der Flächenkonstante die Ellipse den Flächensatz noch nicht in aller Strenge erfüllt. Um auch diese Möglichkeit zu prüfen, habe ich nach Gliederung des gesamten Beobachtungsmaterials in vier symmetrisch zu den Epochen 1850.0, 1870.0, 1890.0 und 1910.0 liegende Gruppen für jede derselben Interpolationsformeln abzuleiten versucht. Trotzdem ich als Einheit der Zeit 20 Jahre wählte, somit der Koeffizient t des Ansatzes

$$p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + \dots$$

innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt, während die höheren Potenzen noch kleiner werden, habe ich weder eine rasche noch eine praktisch brauchbare Konvergenz erzielt. Vielmehr ließen die den gemessenen p anhaftenden Fehler in den linken Seiten

der Bedingungsgleichungen überhaupt keinen Gang aufkommen und bewirkten, daß die Werte der höheren Differentialquotienten selbst rechnerisch unsichere Beträge annahmen und jegliche Konvergenz vereitelten.

4. Die Bahnbestimmung nach Klinkerfues.

Wie in der Einleitung bereits hervorgehoben, verspricht die Methode von Klinkerfues, trotzdem sie sich nur des Mindestmaßes von sieben unabhängigen Beobachtungen bedient, Erfolg, da sie die Differenzen von sechs Positionswinkeln verwendet und man hoffen darf, dadurch wenigstens einen Teil der ihnen anhaftenden Fehler zu eliminieren. Hierzu kommt noch, daß die Bestimmung aller Elemente mit Ausnahme von a ohne Rücksicht auf die Distanzen durchgeführt werden kann und diese erst zum Schluß zur Ermittlung von a herangezogen werden.

Die Methode baut sich auf auf dem Gedanken, daß die Flächen der wahren Bahn zu ihren Projektionen immer im Verhältnis $1 : \cos i$ stehen, also zwei Dreiecksflächen der wahren Bahn das gleiche Verhältnis haben wie die entsprechenden der scheinbaren Bahn. Unter Verwendung von sechs Positionswinkeln resultieren hieraus die Beziehungen:

$$\alpha = \frac{\sin(p_2 - p_1)\sin(p_3 - p_6)}{\sin(p_3 - p_1)\sin(p_2 - p_6)} = \frac{\sin(v_2 - v_1)\sin(v_3 - v_6)}{\sin(v_3 - v_1)\sin(v_2 - v_6)}$$

$$\beta = \frac{\sin(p_2 - p_1)\sin(p_4 - p_6)}{\sin(p_4 - p_1)\sin(p_2 - p_6)} = \frac{\sin(v_2 - v_1)\sin(v_4 - v_6)}{\sin(v_4 - v_1)\sin(v_2 - v_6)}$$

$$\gamma = \frac{\sin(p_2 - p_1)\sin(p_5 - p_6)}{\sin(p_5 - p_1)\sin(p_2 - p_6)} = \frac{\sin(v_2 - v_1)\sin(v_5 - v_6)}{\sin(v_5 - v_1)\sin(v_2 - v_6)}$$

Die linken Seiten sind unmittelbar aus den Beobachtungen abzuleiten. Die Berechnung der rechten Seiten erfordert die Kenntnis der drei Elemente T, U und e, indem

$$\frac{2\pi}{U}(t - T) = E - e\sin E \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$$

ist. Umgekehrt kann man aus den durch die Beobachtungen bekannten Verhältnissen α, β, γ diese drei Elemente berechnen. Man verfährt hierbei so, daß man, am besten durch eine graphische Aufzeichnung der scheinbaren Bahn, genäherte Werte für T, U und e ermittelt, die ihnen zugehörigen Verhältnisse α_0, β_0, γ_0 bestimmt und mit der regula falsi für drei Unbekannte die Aenderungen berechnet, deren sie zur Erzielung der Quotienten α, β, γ bedürfen. Zu dem Zweck sucht man unter Beibehaltung je zweier Elemente und alleiniger Variation des dritten um einen bestimmten Betrag die hierdurch erzeugten Aenderungen $\frac{\partial \alpha}{\partial T}$ usw. und bestimmt dann die Unbekannten aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \alpha}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial \alpha}{\partial e} \Delta e = \alpha - \alpha_0$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \beta}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial \beta}{\partial e} \Delta e = \beta - \beta_0$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \gamma}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial \gamma}{\partial e} \Delta e = \gamma - \gamma_0$$

Klinkerfues schlägt statt der Aenderungen von T und U Variationen von M und n vor, ich halte es für zweckmäßiger, bei den ersten Hypothesen Inkremente von T und U zu wählen, da es, insbesondere bei langsam bewegten Sternsystemen, nur numerisch kleinerer Variationen dieser Elemente zur Erzielung der gleichen Wirkung bedarf, zu der man stärkere Inkremente von M und n benötigt hätte. Die Knotenlänge folgt aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{\frac{\sin(p_2+p_1)}{\sin(p_2-p_1)}\sin^2(v_2-v_1) - \frac{\sin(p_3+p_1)}{\sin(p_3-p_1)}\sin^2(v_3-v_1) + \frac{\sin(p_3+p_2)}{\sin(p_3-p_2)}\sin^2(v_3-v_2)}{\frac{\cos(p_2+p_1)}{\sin(p_2-p_1)}\sin^2(v_2-v_1) - \frac{\cos(p_3+p_1)}{\sin(p_3-p_1)}\sin^2(v_3-v_1) + \frac{\cos(p_3+p_2)}{\sin(p_3-p_2)}\sin^2(v_3-v_2)}$$

die durch eine geeignete Kombination und Umformung der für drei beliebige der sechs Beobachtungsepochen angesetzten Beziehungen $\operatorname{tg}(p-\Omega) = \operatorname{tg}(v+\omega)\cos i$ entsteht. ω und i endlich folgen aus:

$$\sin(v_3+v_2+2\omega) = \sin(p_3+p_2-2\Omega)\frac{\sin(v_3-v_2)}{\sin(p_3-p_2)}$$
$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}(p-\Omega)}{\operatorname{tg}(v+\omega)}$$

Die Berechnung der noch fehlenden großen Halbachse a kann nach dem gleichen Verfahren durchgeführt werden, dessen ich mich bereits bei der Bahnverbesserung nach Zwiers bedient habe.

Der Anwendung dieser Methode auf das System $O\Sigma 208$ wurden aus der im vorigen Abschnitt gegebenen Liste der Gesamtjahresmittel die folgenden sechs Positionswinkel zugrunde gelegt:

1843.423: $p_1 = 6^\circ.978$
1858.413: $p_2 = 35.98$
1873.454: $p_3 = 93.573$
1887.431: $p_4 = 219.21$
1903.325: $p_5 = 290.865$
1912.323: $p_6 = 308.466$

Diese Beobachtungen wurden gewählt, da sie einmal ziemlich gleichförmig über den ganzen Beobachtungszeitraum verteilt sind und zweitens in dem betreffenden Zeitabschnitt das größte Gewicht besitzen. Damit nehmen die Quotienten α, β, γ die Werte an:

$\lg \alpha = 9.44421$ $\quad \alpha = +0.2781$
$\lg \beta = 9.95896$ $\quad \beta = +0.9098$
$\lg \gamma = 9.17945$ $\quad \gamma = +0.1512$

Als erste Hypothese für die Elemente T, U und e wurde $T = 1883.5$, $U = 112^{a}.5$ und $e = 0.50$ gewählt und damit die in der ersten Spalte der folgenden Tabelle gegebenen Quotienten α_0, β_0, γ_0 berechnet. Die zweite Hypothese $T = 1881.5$, $U = 112^{a}.5$, $e = 0.50$ lieferte die in der zweiten Spalte aufgeführten Logarithmen der Quotienten $\alpha_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial T}$, $\beta_0 + \frac{\partial \beta}{\partial T}$ und $\gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial T}$. Der dritten Hypothese $T = 1883.5$, $U = 114^{a}.5$, $e = 0.50$ entspricht die dritte und der vierten Hypothese $T = 1883.5$, $U = 112^{a}.5$, $e = 0.55$ die vierte Spalte. Sie stellen die Logarithmen der Quotienten $\alpha_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial U}$, $\beta_0 + \frac{\partial \beta}{\partial U}$, $\gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial U}$ beziehungsweise $\alpha_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial e}$, $\beta_0 + \frac{\partial \beta}{\partial e}$, $\gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial e}$ dar.

	1. Hypothese	2. Hypothese	3. Hypothese	4. Hypothese
α	9.50693	9.44829	9.49098	9.56005
β	0.08094	9.89632	0.11406	9 91018
γ	9.16446	9.15737	9.15993	9.10847

Ausgedrückt in den für T, U und e beziehentlich gültigen Inkrementeneinheiten -2.0, $+2.0$ und $+0.05$ hat man also zur Bestimmung der an den Ausgangselementen 1883.5, 112.5 und 0.50 erforderlichen Korrektionen das Gleichungssystem:

$8.60837_n\ \Delta T + 8.06398_n\ \Delta U + 8.62126\ \Delta e = 8.63557_n$
$9.62038_n \quad 8.97994 \quad 9.59296_n \quad = 9.46988_n$
$7.37387_n \quad 7.18093_n \quad 8.24709_n \quad = 7.70996$

Seine Lösungen sind:

$\Delta T = +0.88836 \quad \Delta U = -0.65595 \quad \Delta e = -0.35294$

Dies ergibt in den ursprüglichen Einheiten

$\Delta T = -1\,777 \quad \Delta U = -1^{a}.312 \quad \Delta e = -0.01765$

und damit die verbesserten Elemente:

$T = 1881.723 \quad U = 111^{a}.188 \quad e = 0.48235$

Die hiermit zur Kontrolle durchgeführte Berechnung der Quotienten α, β, γ ergab gegenüber den aus den Beobachtungen gefundenen die Differenz:

$\alpha_B - \alpha_R = +0.0019$
$\beta_B - \beta_R = +0.0197$
$\gamma_B - \gamma_R = -0.0010$

Da diese Darstellung zu genügen schien, wurden die noch fehlenden Elemente Ω, ω und i aus den Positionswinkeln p_3, p_5

und p_6 ermittelt und die Wiedergabe der sechs Ausgangsdaten durch die Elemente geprüft. Abgesehen von den zur Berechnung von Ω, ω und i verwandten Positionswinkeln, die streng dargestellt werden mußten, war die Uebereinstimmung noch unbefriedigend. Ich suchte daher durch Durchrechnung neuer Hypothesen, jetzt aber unter Variation von M und n, da es sich nur mehr um kleine Korrektionen handeln konnte, die Elemente zu verbessern. Die erste Hypothese bestand aus den eben erhaltenen Werten von T, U und e. In der zweiten wurde der Epoche 1881.723 die mittlere Anomalie $M = +1^{0}.0$ zuerteilt, in der dritten n um 0.01 seines Betrages vergrößert und in der vierten $e = 0.49235$ gewählt. Ich lasse die zugehörigen Werte der Quotienten in gleicher Anordnung wie vorhin wieder logarithmisch folgen.

	1. Hypothese	2. Hypothese	3. Hypothese	4. Hypothese
α	9.44119	9.42899	9.45284	9.45732
β	9.94946	9.92934	9.93793	9.920025
γ	9.18252	9.18183	9.18548	9.170585

Dies führt in den für M, n und e gültigen Einheiten von $+1^{0}.0$, $[8.51025]^{0}$ und $+0.01$ auf die Bestimmungsgleichungen:

$$7.88366\,n \quad \Delta M + 7.87552 \quad \Delta n + 8.01919 \quad \Delta e = 7.28548$$
$$8.60534\,n \quad 8.36793\,n \quad 8.76594\,n = 8.29413$$
$$6.38183\,n \quad 7.01752 \quad 7.61575\,n = 7.03088\,n$$

mit den wieder in den ursprünglichen Einheiten ausgedrückten Lösungen:

$$\Delta M = -0^{0}.46996 \quad \Delta n = -0^{0}.014908 \quad \Delta e = +0.0017139$$

Sie ergeben die Elemente:

$$T = 1881.869 \quad U = 111^{0}.703 \quad e = 0.48406$$

und diese die Quotientendifferenzen:

$$\alpha_B - \alpha_R = +0.0001$$
$$\beta_B - \beta_R = -0.0027$$
$$\gamma_B - \gamma_R = 0.0000$$

so daß die Uebereinstimmung eine vollständig zu nennende ist. Die daraufhin neuerlich durchgeführte Berechnung von Ω aus den mit größtem Gewicht versehenen Positionswinkeln der Epochen 1873.454, 1903.325 und 1912.323 ergab wegen der bekannten Vieldeutigkeit vier Werte, denen die aus den Messungen von 1903.325 und 1912.323 gefundenen ω so zugeordnet werden müssen, daß $v + \omega$ und $p - \Omega$ im gleichen Quadranten liegen. Zwei der vier Wertepaare scheiden bei der Bestimmung von $\cos i$ aus, die beiden anderen sind gleichwertig. Ich erhielt unter Beiseitelassung der

nur um 180° verschiedenen Werte für Knotenlänge und Abstand des Periastrons so das folgende Elementensystem:

$$T = 1881.869$$
$$U = 111^{\circ}.703$$
$$e = 0.48406$$
$$i = 22^{\circ}.203$$
$$\Omega = 123^{\circ}.970 \quad (1925.0)$$
$$\omega = 41^{\circ}.236$$
$$n = +3^{\circ}.22285$$

Die Darstellung der sechs Ausgangsdaten durch dieses System ergibt die Differenzen:

1843.423: $p_B - p_E =$	$+0^{\circ}.100$	1887.431: $p_B - p_E =$	$+0.^{\circ}210$
1858.413:	$+0.107$	1903.325:	0.000
1873.454:	0.000	1912.323:	0.000

und ist befriedigend. Die noch vorhandene Abweichung ist durch das nicht völlige Verschwinden von $\beta_B - \beta_E$ bedingt. Die weiterhin auf Grund der erhaltenen Elemente vorgenommene Vergleichung zwischen der Ephemeride und den als Normalorten dienenden Gesamtjahresmitteln des vorigen Abschnitts zeigt das nun wiederzugebende Bild.

t	$p_B - p_E$	g
1842.364	$-0.^{\circ}406$	4
43.423	$+0.100$	5
44.26	-0.964	2
45.389	$+1.443$	3
46.311	$+1.969$	5
47.236	$+2.150$	5
48.405	-0.645	3
50.390	$-3\ 392$	4
51.398	$-0\ 517$	5.5
52.391	$+0.087$	5.5
53 403	-7.825	4
54.326	-0.568	4
57.342	-1.757	2
58.413	$+0.107$	4
59.381	$+0.703$	4
61 411	$+6.078$	4
1862.39	-0.696	2

t	$p_B - p_E$	g
1864.43	$-\ 5.863$	2
66.378	-14.275	4
69.400	-27.042	3
70.425	$+\ 4.628$	3
72.415	-11.589	3
73.454	0.000	6
75.470	$+\ 6.134$	3
82.190	-27.174	1
87.431	$+\ 0.210$	5
89.310	$-\ 5.409$	3
92.168	$-\ 2.829$	5
93.362	$-\ 7.993$	2
94 380	$-\ 1.055$	1.5
95.582	$+\ 5.962$	3.5
96.922	$-\ 4.423$	4
97.643	$-\ 1.125$	8
1898 253	$+\ 1.225$	9

t	$p_B - p_E$	g
1899.342	$+\ 3.^{\circ}011$	12
1900.337	$-\ 0.448$	3.5
01.371	$+\ 1.781$	6 5
02.378	$-\ 0.937$	13.5
03.325	0.000	19.5
04.222	$+\ 2.227$	4
05.353	$-\ 0.347$	3
07.15	$-\ 3.317$	2
08.256	$-\ 4.749$	9
09.262	$+\ 0\ 190$	5.5
10.326	$+\ 2.811$	4.5
11.295	$+\ 1.657$	4.5
12.323	0.000	9.5
13.310	-10.621	1.5
1920.502	$+\ 3.338$	5

Die Vergleichung ergibt 20 positive, 26 negative, 3 Null-Abweichungen bei 25 Zeichenwechseln. Sowohl hinsichtlich der Zeichenverteilung als auch hinsichtlich der absoluten Größe der Differenzen ist die Darstellung als eine schon befriedigende zu bezeichnen, abgesehen von wenigen in der Nähe des Periastrons liegenden Ausnahmen, wo die Beobachtungsfehler größer sind.

Um, wenn möglich, noch eine weitere Verbesserung der Bahn herbeizuführen, wurden die Abweichungen, wie durch die Striche angedeutet, in die folgenden 19 Normalorte zusammengezogen. Ausgeschieden wurden dabei die beiden Beobachtungen 1869.400 und 1882.190, da sie eine zu starke Abweichung zeigen und auf Messungen beruhen, die von den Beobachtern selbst als wenig genau bezeichnet werden.

t	$p_B - p_R$	g	t	$p_B - p_R$	g
1844.359	+ 0.585	19	1889.310	− 5.409	3
48.580	− 0.396	12	92.509	− 4.304	7
52.724	− 1.891	19	95.221	+ 3.857	5
58.586	− 0.027	10	1897.767	− 0.746	21
61.737	+ 3.820	6	1900.100	+ 2.097	22
65.729	− 11.471	6	03.076	− 0.101	37
70.425	+ 4.628	3	07.476	− 3.601	14
73.108	− 3.862	9	11.187	+ 0.205	25.5
75.470	+ 6.134	3	1920.502	+ 3.338	5
1887.431	+ 0.210	5			

Die Ausgleichung selbst wurde nach denselben Formeln vorgenommen, die bereits bei Zwiers gegeben wurden. Hingegen ist zum Unterschiede gegen dort den Rechnungen das Prinzip $\Sigma d p^2 = \text{Min.}$ zugrunde gelegt, um vorläufig die noch unsicheren Distanzen außer acht lassen zu können. Aus den mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten multiplizierten und durch Einführung von

$$x = 0.78410\ d\Omega$$
$$y = 9.89542\ di$$
$$z = 0.75466\ d\omega$$
$$t = 1.026955\ de$$
$$u = 0.77653\ n\,dT$$
$$v = 1.980765\ dn$$

Einheit d. recht. Seite $= 1.448675$

homogen gemachten Bedingungsgleichungen folgen die Normalgleichungen:

$+6.2566\ x$	$+2.30015\ y$	$+6.62785\ z$	$+1.8625\ t$	$-5.6537\ u$	$+1.31505\ v$	$= -0.6201$
$+2.30015$	$+5.4254$	$+2.28065$	$+2.8635$	-3.5722	$+3.2814$	$= -0.54265$
$+6.62785$	$+2.28065$	$+7.04625$	$+1.7219$	-6.0098	$+1.06615$	$= -0.6915$
$+1.8625$	$+2.8635$	$+1.7219$	$+6.84215$	-1.8850	$+6.5876$	$= +0.3193$
-5.6537	-3.5722	-6.0098	-1.8850	$+6.56855$	-1.4022	$= +0.8006$
$+1.31505$	$+3.2814$	$+1.06615$	$+6.5876$	-1.4022	$+7.07835$	$= +0.36915$

Ihre Auflösung gibt unter Beifügung der mittleren Fehler:

$$d\Omega = +10^0.828 \pm 27^0.405$$
$$di = -5^0.766 \pm 11^0.155$$
$$d\omega = -11^0.344 \pm 28^0.244$$
$$de = +0^0.395 \pm 1^0.737 \qquad de = +0.00690 \pm 0.03031$$
$$n\,dT = -0^0.131 \pm 2^0.302 \qquad dT = -0^a.041 \pm 0^a.714$$
$$dn = -0^0.03167 \pm 0^0.23968$$

Da die mittleren Fehler überall größer sind als die Korrektionen, diese kaum als differentiell angesprochen werden dürfen und schließlich die Fehlerquadratsumme, in der Einheit von $[1.448675]^{\circ}$ allerdings, durch die Ausgleichung nur die kaum nennenswerte Verminderung von 2.4116 auf 2.2051 erfuhr, ist die Aussicht nur eine geringe, durch das neue Elementensystem, das nachfolgend gegeben ist, eine wesentliche Verbesserung in der Darstellung der Beobachtungen zu erzielen.

$$\begin{aligned} T &= 1881.828 \\ U &= 112^{a}.811 \\ e &= 0.49096 \\ i &= 16^{\circ}.437 \\ \Omega &= 134^{\circ}.798 \qquad (1925.0) \\ \omega &= 29^{\circ}.892 \\ n &= +\ 3^{\circ}.19118 \end{aligned}$$

Um zu prüfen, ob es überhaupt nicht ratsamer ist, bei dem früheren System stehen zu bleiben, wurden die dort erhaltenen Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung mit den auf Grund des letzten Systems errechneten verglichen.

t	$p_B - p_R$ (I)	$p_B - p_R$ (II)	g	t	$p_B - p_R$ (I)	$p_B - p_R$ (II)	g
	°	°			°	°	
1842.364	− 0.406	− 0.870	4	1887.431	+ 0.210	+ 0.500	5
43.423	+ 0.100	− 0.282	5	89.310	− 5.409	− 4.682	3
44.26	− 0.964	− 1.280	2	92.168	− 2.829	− 1.861	5
45.389	+ 1.443	+ 1.219	3	93.362	− 7.993	− 7.028	2
46.311	+ 1.969	+ 1.824	5	94.380	− 1.055	− 0.124	1.5
47.236	+ 2.150	+ 2.086	5	95.582	+ 5.962	+ 6.830	3.5
48.405	− 0.645	− 4.601	3	96.922	− 4.423	− 3.643	4
50.390	− 3.392	− 3.160	4	97.643	− 1 125	− 0.396	8
51.398	− 0.517	− 0.184	5.5	98.253	+ 1.225	+ 1.909	9
52.391	+ 0.087	+ 0.523	5.5	1899.342	+ 3.011	+ 3.614	12
53.403	− 7.825	7.281	4	1900.337	− 0.448	+ 0.080	3.5
54.326	− 0.568	+ 0.077	4	01.371	+ 1.781	+ 2.234	6.5
57.342	− 1.757	− 0.770	2	02.378	− 0.937	− 0.557	13.5
58.413	+ 0.107	+ 1.218	4	03.325	0.000	+ 0 315	19.5
59.381	+ 0.703	+ 1.927	4	04.222	+ 2.227	+ 2.481	4
61.411	+ 6.078	+ 7.535	4	05.353	− 0.347	− 0.162	3
62.39	− 0.696	+ 0.869	2	07.15	− 3.317	− 3.231	2
64.43	− 5.863	− 4.091	2	08.256	− 4.749	− 4.718	9
66.378	− 14.275	− 12.351	4	09.262	+ 0.190	+ 0.174	5.5
69.400	− 27.042	− 25.030	3	10.326	+ 2.811	+ 2.749	4.5
70.425	+ 4.628	+ 6.636	3	11.295	+ 1.657	+ 1.557	4.5
72.415	− 11.589	− 9.820	3	12.323	0.000	− 0.136	9.5
73.454	0.000	+ 1.579	6	13.310	− 10.621	− 10.789	1.5
75.470	+ 6.134	+ 7.149	3	1920.502	+ 3.338	+ 3.040	5
1882.190	− 27.174	− 28.246	1				

Gegenüber 20 positiven, 26 negativen und 3 Nullabweichungen mit 25 Zeichenwechseln beim unausgeglichenen System ergeben

sich jetzt 24 positive und 25 negative Differenzen bei 23 Zeichenwechseln. Hinsichtlich ihrer absoluten Größe sind 20 Differenzen und zwar 12 positive, 5 negative und 3 Nullabweichungen größer geworden, absolut abgenommen haben 25 Differenzen, worunter 7 positive und 18 negative, 4 Abweichungen haben ihr Vorzeichen geändert. Zu Beginn und Ende des ganzen Beobachtungszeitraumes sind hauptsächlich die negativen Differenzen absolut gewachsen und die positiven kleiner geworden, in der Mitte gilt gerade das Umgekehrte. Sowohl in der gleichmäßigeren Vorzeichenverteilung als auch in dem häufigeren Auftreten der absoluten Verminderung der Abweichungen, zumal bei den großen Differenzen, erblicke ich eine Verbesserung gegenüber dem früheren System, so daß ich das ausgeglichene weiterhin beibehalten will.

Es erübrigt sich nunmehr noch die Bestimmung der großen Halbachse a, zu der die Gesamtjahresmittel, mithin alle gemessenen und auch nur geschätzten Distanzen verwandt wurden. Benutzt wurde die aus

$$\varrho \sin (p - \Omega) = r \cos i \sin (\omega + v)$$

in Verbindung mit

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

hervorgehende Beziehung:

$$\varrho = \sqrt{1 - e^2} \cos i \frac{\sin E}{\sin v} \frac{\sin (\omega + v)}{\sin (p - \delta\Omega)} a.$$

Die veränderlichen Größen wurden der Ephemeride entnommen. Die durch Multiplikation mit $\sqrt{g_\varrho}$ auf gleiches Gewicht gebrachten Bedingungsgleichungen führen auf die Normalgleichung

$$230.2353\, a = 78.8899$$

mit der Lösung $a = 0''.34265 \pm 0''.00826$

und dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit $\pm 0''.12535$. Schon der kleine mittlere Fehler zeigt die Genauigkeit der Bestimmung von a. Dasselbe ist aus der Vergleichung zwischen Beobachtung und Rechnung ersichtlich.

t	$\varrho_B - \varrho_R$	g	t	$\varrho_B - \varrho_R$	g	t	$\varrho_B - \varrho_R$	g
	"			"			"	
1842.364	− 0.037	4	1859.381	− 0.003	4	1900.337	− 0.091	3.5
43.423	+ 0.012	4.5	61.411	+ 0.034	4	01.371	+ 0.062	6
44.26	+ 0.114	2	62.39	+ 0.041	2	02.378	+ 0.038	11.5
45.389	− 0.060	3	64.43	− 0.041	2	03.325	− 0.022	15.5
46.311	− 0.069	5	66.378	− 0.045	3	04.222	+ 0.033	2
47.236	− 0.089	4.5	72.415	+ 0.006	3	05.353	− 0.067	3
48.405	− 0.024	3	87.431	+ 0.009	5	08.256	+ 0.030	7
50.390	− 0.021	4	92.168	+ 0.017	5	09.262	+ 0.024	4.5
51.398	− 0.066	5.5	93.362	+ 0.019	2	10.326	+ 0.024	4.5
52.391	− 0.082	5.5	95.582	+ 0.030	3	11.295	− 0.023	4.5
53.403	− 0.061	4	96.922	− 0.055	3	12.323	+ 0.029	9.5
54.326	− 0.060	4	97.643	+ 0.080	6	13.310	+ 0.164	1.5
57.342	+ 0.026	2	98.253	+ 0.150	9	1920.502	− 0.033	4
1858.413	+ 0.007	4	1899.342	+ 0.010	12			

Bei 22 positiven, 19 negativen Vorzeichen und 18 Zeichenwechseln übersteigen die Abweichungen nirgends das Maß der Beobachtungsfehler bei einem so engen Sternsystem. Ich sehe daher von einer Verbesserung der Halbachse ab und wende mich nach einer Zusammenstellung der Elemente der Vergleichung der eigentlichen Beobachtungen mit der Ephemeride zu.

$T = 1881\ 828$
$U = 112^{a}.811$
$e = 0.49096$
$i = 16^{0}.437$
$\Omega = 134^{0}.798$ (1925.0)
$\omega = 29^{0}.892$
$a = 0''.34265$
$n = +\ 3^{0}.1912$

t	Beobachter	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$	t	Beobachter	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$
		°	"			°	"
1842.355	O. Σ.	– 0.81	– 0.04	1873.47	Bruns	+ 3.58	
42.389	Ma	– 1.06	– 0.05	75.470	O. Σ.	+ 7.15	
43.392	Ma	– 1.40	+ 0.03	82.190	En	–28.28	
43.47	O. Σ.	+ 1.40	– 0.01	87.431	Sp	+ 0.42	+ 0.04
44.26	O. Σ.	– 1.28	+ 0.11	89.310	O. Σ.	– 8.84	
45.389	Ma	+ 2.22	– 0.06	89.310	H. Σ.	– 2.04	
46.272	Ma	+ 4.20	– 0.15	92.132	β	+ 0.45	0.00
46.37	O. Σ.	– 1.74	+ 0.04	92.310	Big	–10.93	+ 0.05
47.120	Ma	+ 4 02	– 0.15	93.362	Sp	– 7.11	+ 0.05
47.41	O. Σ.	– 0.82	– 0.01	94.380	Big	– 0.12	
48.405	O. Σ.	– 4.60	– 0.02	95.383	Gp	+ 3.76	+ 0.07
50.390	O. Σ.	– 3.16	– 0.02	95.731	See	+ 9.14	+ 0.01
51.390	Ma	+ 7.32	– 0.11	96.922	A	– 4.31	– 0.04
51.405	O. Σ.	– 6.44	– 0.02	97.395	Com	+ 2.85	0.00
52.385	O. Σ.	– 5.75	– 0.02	97.891	Hu	– 3.83	+ 0 04
52.399	Ma	+ 8.05	– 0.16	98.181	Hu	+ 1.83	+ 0.12
53.403	O. Σ.	– 7.28	– 0.06	98.279	Com	+ 4.43	– 0.01
54.282	Da	+ 0.51	+ 0.01	98.359	L	– 0.79	+ 0.22
54.37	O. Σ.	– 2 66	+ 0.02	99.284	Com	– 2.51	+ 0.01
57.342	Se	– 1.32	– 0.07	99.298	Br	+ 3.88	– 0.09
58.413	O. Σ.	+ 1.22	+ 0.01	99.313	Bro	+ 3.87	+ 0.07
59.37	Winn	+ 7.17	– 0 03	99.405	L	+ 5.12	– 0.05
59.385	O. Σ.	+ 0.18	0.00	1899.406	Doo	+ 6.74	+ 0.03
61.40	Winn	+12.96	+ 0.10	1900.315	L	– 1.08	– 0 15
61.415	O. Σ.	+ 5.72	+ 0.01	00.367	Br	+ 2.07	– 0.04
62.39	O. Σ.	+ 0.87	+ 0.04	01.297	Br	+ 5.63	– 0.02
64.43	O. Σ.	– 4.09	– 0.04	01.417	Com	– 1.92	+ 0.02
66.27	En	–14.23		02.313	Com	– 0 11	0.00
66.40	Knott	–12.01	– 0.05	02.317	Postelmann	+ 0.28	+ 0.05
66.42	O. Σ.	–11.58	– 0.04	02.345	Br	+ 0.56	– 0.05
69.400	Du	–25.14		02.399	H. Σ.	– 2.33	+ 0.05
70.425	Du	+ 6.52		02.474	Hu	– 0.72	– 0.03
72.415	O. Σ.	– 9.82	+ 0.01	03.23	Lo	+ 8.30	
73.44	Lindemann	– 4.14		03.249	Br	+ 2.15	– 0.10
1873.453	O. Σ.	+ 2.51		1903.303	Biesbr	– 0.12	– 0.05

t	Beobachter	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$	t	Beobachser	$p_B - p_R$	$\varrho_B - \varrho_R$
		°	″			°	″
1903.326	Com	+ 0.20	— 0.06	1910.280	Br	+ 2.75	— 0.06
03.363	Postelmann	— 1.82		10.349	Biesbr	+ 2.78	+ 0.02
03.379	A	— 4.96	— 0.06	11.256	Voûte	+ 0.31	— 0.06
03.409	H. Σ.	— 7.24	— 0.06	11.344	Biesbr	+ 3.15	— 0.01
04.211	Postelmann	+ 3.56		12.123	A	+ 0.31	— 0.02
04.233	Biesbr	+ 1.11	— 0.01	12.315	Br	+ 2.48	— 0.04
05.353	A	— 0.83	— 0.06	12.380	Do	— 7.63	— 0.03
07.15	Lo	— 8.04		12.454	Biesbr	+ 1.22	+ 0.07
08.091	Biesbr	— 5.15	— 0.03	13 310	Do	—10.79	+ 0.16
08.388	Prz	— 5.20	0.00	20.501	Pavel	+ 3.17	— 0.04
09.174	Biesbr	— 0.41	— 0.03	20.502	H. Σ.	+ 0.22	+ 0.12
1909.368	Do	+ 0.91	+ 0.05	1920.504	Bern.	+ 5.05	— 0.12

Die Vergleichung ergibt im Positionswinkel 48 positive und 46 negative Abweichungen bei 45 Zeichenwechseln, in der Distanz 29 positive, 45 negative und 5 Nullabweichungen bei 34 Zeichenwechseln. Die Größenordnung der Differenzen ist die gleiche wie die, die wir nach der auf das Zwierssche Elementensystem aufgebauten Verbesserung erhalten hatten.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Ich stelle zum Schluß der Ausführungen nochmals die beiden gewonnenen Elementensysteme nebst den Vergleichungen zwischen Beobachtung und Rechnung zusammen, denen ich im Positionswinkel die Reduktion auf den größten Kreis mit Hilfe der errechneten Distanzen beifüge, um die Größenverhältnisse der Differenzen erkennen zu lassen.

Zwiers		Klinkerfues	
$T = 1883.576$		$T = 1881.828$	
$U = 112^a.663$		$U = 112^a.811$	
$e = 0.49745$		$e = 0.49096$	
$i = 22^0.861$		$i = 16^0.437$	
$= 157^0.890$	(1925.0)	$\Omega = 134^0.798$	(1925.0)
$\omega = 9^0.237$		$\omega = 29^0.892$	
$a = 0''.34293$		$a = 0''.34265$	
$n = +\ 3^0.1954$		$n = +\ 3.1912$	

Epoche	Beobachter	$p_B - p_R$ (Zw)	$p_B - p_R$ (Kl)	$p_B - p_R$ red. a. gr. Kr. (Zw)	(Kl)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Zw)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Kl)
		°	°	″	″	″	″
1842.355	O. Struve	+ 0.32	— 0.81	+ 0.0027	— 0.0066	— 0.05	— 0.04
42.389	Mädler	+ 0.07	— 1.06	+ 0.0006	— 0.0087	— 0.06	— 0.05
43.392	Mädler	— 0.14	— 1.40	— 0.0011	— 0.0112	+ 0.02	+ 0.03
43.47	O. Struve	+ 2.68	+ 1.40	+ 0.0220	+ 0.0112	— 0.02	— 0.01
44.26	O. Struve	+ 0.11	— 1.28	+ 0.0009	— 0.0103	+ 0.10	+ 0.11
1845.389	Mädler	+ 2.77	+ 2.22	+ 0.0222	+ 0.0174	— 0.07	— 0.06

Epoche	Beobachter	$p_B - p_R$ (Zw)	$p_B - p_R$ (Kl)	$p_B - p_R$ red. a. gr. Kr. (Zw)	(Kl)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Zw)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Kl)
		°	°	″	″	″	″
1846.272	Mädler	+ 5.88	+ 4.20	+ 0.0472	+ 0.0330	— 0.16	— 0.15
46.37	O. Struve	— 0.05	— 1.74	— 0.0004	— 0.0137	+ 0.03	+ 0.04
47.120	Mädler	+ 5.82	+ 4.02	+ 0.0457	+ 0.0309	— 0.16	— 0.15
47 41	O. Struve	+ 1.03	— 0.82	+ 0 0081	— 0.0063	— 0.02	— 0 01
48.405	O. Struve	— 2.60	— 4.60	— 0.0204	— 0.0345	— 0.04	— 0.02
50.390	O. Struve	— 0.83	— 3.16	— 0.0064	— 0.0232	— 0.04	— 0.02
51.390	Mädler	+ 9 82	+ 7.32	+ 0 0737	+ 0.0524	— 0.13	— 0.11
51.405	O. Struve	— 3.93	— 6 44	— 0.0295	— 0.0461	— 0.04	— 0.02
52.385	O. Struve	— 3.07	— 5.75	— 0.0225	— 0.0411	— 0.03	— 0 02
52.399	Mädler	+ 10.73	+ 8.05	+ 0 0787	+ 0.0576	— 0.17	— 0.16
53.403	O. Struve	— 4.41	— 7.28	— 0.0316	— 0.0508	— 0.07	— 0.06
54.282	Dawes	+ 3.54	+ 0.51	+ 0 0253	+ 0.0035	— 0.01	+ 0.01
54.37	O. Struve	+ 0.39	— 2.66	+ 0 0028	— 0.0181	0.00	+ 0.02
57.342	Secchi	+ 2.33	— 1 32	+ 0.0155	— 0.0085	— 0.08	— 0.07
58.413	O. Struve	+ 5.11	+ 1 22	+ 0.0330	+ 0.0077	0 00	+ 0.01
59.37	Winnecke	+ 11.27	+ 7.17	+ 0.0708	+ 0.0451	— 0.03	— 0.03
59.385	O. Struve	+ 4.29	+ 0.18	+ 0.0270	+ 0.0011	0.00	0.00
61.40	Winnecke	+ 17.56	+ 12.96	+ 0 1073	+ 0.0769	+ 0.09	+ 0.10
61.415	O. Struve	+ 10.32	+ 5.72	+ 0.0630	+ 0.0339	0.00	+ 0.01
62.39	O. Struve	+ 5.72	+ 0.87	+ 0 0339	+ 0 0050	+ 0.03	+ 0.04
64.43	O. Struve	+ 1.32	— 4.09	+ 0.0074	— 0.0221	— 0.05	— 0.04
66.27	Engelmann	— 8.27	— 14.23	— 0.0433	— 0.0720		
66.40	Knott	— 6.00	— 12.01	— 0.0314	— 0.0608	— 0.06	— 0.05
66.42	O. Struve	— 5.57	— 11.58	— 0.0292	— 0 0586	— 0.05	— 0.04
69.400	Dunér	— 18.12	— 25.14	— 0.0854	— 0.1141		
70.425	Dunèr	+ 13.93	+ 6.52	+ 0.0632	+ 0.0284		
72.415	O. Struve	— 1.56	— 9.82	— 0.0065	— 0.0394	0.00	+ 0.01
73.44	Lindemann	+ 4.61	— 4.14	+ 0.0185	— 0.0159		
73.453	O. Struve	+ 11.27	+ 2.51	+ 0.0452	+ 0.0096		
73.47	H. Bruns	+ 12.35	+ 3.58	+ 0.0496	+ 0.0137		
75.470	O. Struve	+ 17.02	+ 7.15	+ 0.0624	+ 0.0262		
82.190	Engelmann	— 13.26	— 28.28	— 0.0393	— 0.0839		
87.431	Schiaparelli	+ 14.30	+ 0.42	+ 0.0449	+ 0.0014	+ 0.05	+ 0.04
89.310	O. Struve	+ 2.68	— 8.84	+ 0.0089	— 0.0324		
89.310	H. Struve	+ 9.48	— 2.04	+ 0.0314	— 0.0075		
92.132	Burnham	+ 8.18	+ 0.45	+ 0.0300	+ 0.0019	+ 0.03	0.00
92.310	Bigourdan	— 3.43	— 10.93	— 0 0126	— 0.0458	+ 0.08	+ 0.05
93.362	Schiaparelli	— 0 85	— 7.11	— 0.0033	— 0 0310	+ 0.08	+ 0.05
94.380	Bigourdan	+ 5.05	— 0.12	+ 0.0203	— 0.0006		
95.383	Glasenapp	+ 7.99	+ 3.76	+ 0.0349	+ 0.0184	+ 0.10	+ 0 07
95.731	See	+ 13.07	+ 9.14	+ 0.0570	+ 0.0447	+ 0.04	+ 0.01
96.922	Aitken	— 1.32	— 4.31	— 0.0060	— 0.0218	— 0.01	— 0.04
97.395	Comstock	+ 5.50	+ 2.85	+ 0.0259	+ 0.0149	+ 0.03	0.00
97.891	Hussey	— 1.51	— 3.83	— 0.0071	— 0.0201	+ 0.07	+ 0.04
98.181	Hussey	+ 3.97	+ 1.83	+ 0.0194	+ 0.0099	+ 0.15	+ 0.12
98.279	Comstock	+ 6.51	+ 4.43	+ 0.0318	+ 0.0240	+ 0.02	— 0.01
98.359	Lewis	+ 1.25	— 0.79	+ 0.0611	— 0.0043	+ 0.25	+ 0.22
99.284	Comstock	— 0.99	— 2.51	— 0.0050	— 0.0140	+ 0.04	+ 0.01
99.298	Bryant	+ 5.38	+ 3.88	+ 0.0272	+ 0.0217	— 0.06	— 0.09
99.313	Brown	+ 5.37	+ 3.87	+ 0.0272	+ 0.0216	+ 0.10	+ 0.07
99.405	Lewis	+ 6.57	+ 5.12	+ 0.0333	+ 0.0286	— 0.02	— 0.05
1899.406	Doolittle	+ 8.18	+ 6.74	+ 0.0414	+ 0.0376	+ 0.06	+ 0.03
1900.315	Lewis	— 0.08	— 1.08	— 0 0004	— 0.0062	— 0.12	— 0.15
00.367	Bryant	+ 3.05	+ 2.07	+ 0.0160	+ 0 0119	— 0.01	— 0.04

Epoche	Beobachter	$p_B - p_R$ (Zw)	$p_B - p_R$ (Kl)	$p_B - p_R$ red. a. gr. Kr. (Zw)	(Kl)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Zw)	$\varrho_B - \varrho_R$ (Kl)
		°	°	"	"	"	"
1901.297	Bryant	+ 6.22	+ 5.63	+ 0.0337	+ 0.0334	+ 0.01	— 0.02
01.417	Comstock	— 1.37	— 1.92	— 0.0074	— 0.0114	+ 0.05	+ 0.02
02.313	Comstock	+ 0.11	— 0.11	+ 0.0006	— 0.0007	+ 0.03	0.00
02.317	Postelmann	+ 0.50	+ 0.28	+ 0.0028	+ 0.0017	+ 0.08	+ 0.05
02.345	Bryant	+ 0.76	+ 0.56	+ 0.0042	+ 0.0034	— 0.02	— 0.05
02.399	H. Struve	— 2.14	— 2.33	— 0.0120	— 0.0142	+ 0.08	+ 0.05
02.474	Hussey	— 0.56	— 0.72	— 0.0031	— 0.0044	0.00	— 0.03
03.23	Lohse	+ 8.22	+ 8.30	+ 0.0473	+ 0.0522		
03.249	Bryant	+ 2.07	+ 2.15	+ 0.0119	+ 0.0135	— 0.07	— 0.10
03.303	v. Biesbroeck	— 0 22	— 0.12	— 0.0013	— 0.0008	— 0.02	— 0.05
03.326	Comstock	+ 0.09	+ 0.20	+ 0.0005	+ 0.0013	— 0.03	— 0.06
03.363	Postelmann	— 1.94	— 1.82	— 0.0112	— 0.0114		
03.379	Aitken	— 5.08	— 4.96	— 0.0293	— 0.0312	— 0.03	— 0.06
03.409	H. Struve	— 7.37	— 7.24	— 0.0424	— 0.0455	— 0.03	— 0.06
04.211	Postelmann	+ 3.20	+ 3.56	+ 0.0190	+ 0.0230		
04.233	v. Biesbroeck	+ 0.75	+ 1.11	+ 0.0045	+ 0 0072	+ 0.02	— 0.01
05.353	Aitken	— 1.46	— 0.83	— 0.0089	— 0.0055	— 0.03	— 0.06
07.15	Lohse	— 9.02	— 8.04	— 0.0582	— 0.0547		
08.091	v. Biesbroeck	— 6.27	— 5.15	— 0.0416	— 0.0360	— 0.01	— 0.03
08.388	Przybyliok	— 6.37	— 5.20	— 0.0422	— 0.0363	+ 0.02	0.00
09.174	v. Biesbroeck	— 1.67	— 0.41	— 0.0114	— 0.0029	— 0.01	— 0.03
09.368	Doberck	— 0 38	+ 0.91	— 0.0026	+ 0.0065	+ 0.07	+ 0.05
10.280	Bryant	+ 1.37	+ 2.75	+ 0.0096	+ 0.0202	— 0.04	— 0.06
10.349	v. Biesbroeck	+ 1.39	+ 2.78	+ 0.0097	+ 0.0204	+ 0.04	+ 0.02
11.256	Voûte	— 1.17	+ 0.31	— 0.0082	+ 0.0023	— 0.04	— 0.06
11.344	v. Biesbroeck	+ 1.67	+ 3.15	+ 0.0120	+ 0.0231	0.00	— 0.01
12.123	Aitken	— 1.23	+ 0.31	— 0.0088	+ 0.0023	0.00	— 0.02
12.315	Bryant	+ 0.93	+ 2.48	+ 0.0067	+ 0.0186	— 0.02	— 0.04
12.380	Doberck	— 9.19	— 7.63	— 0.0658	— 0.0573	— 0.01	— 0 03
12.454	v. Biesbroeck	— 0.34	+ 1.22	— 0.0024	+ 0.0092	+ 0.09	+ 0.07
13.310	Doberck	— 12.40	— 10.79	— 0.0909	— 0.0829	+ 0.18	+ 0.16
20.501	Pavel	+ 1.44	+ 3.17	+ 0.0118	+ 0.0260	— 0.04	— 0.04
20.502	H. Struve	— 1.52	+ 0.22	— 0.0125	+ 0.0018	+ 0.12	+ 0.12
1920.504	Bernewitz	+ 3.31	+ 5.05	+ 0.0272	+ 0.0414	— 0.12	— 0.12

Die trotz der in beiden Elementensystemen nicht unwesentlich voneinander abweichenden Elemente i, Ω und ω nur geringen Unterschiede in den Differenzen lassen keinen bündigen Schluß darüber zu, welchem der beiden Systeme der Vorzug zu geben ist. Vielleicht ist die Darstellung durch das Klinkerfuessche System eine um ein weniges bessere, da die hierauf gegründete Fehlerkurve eine gleichmäßigere Verteilung der absoluten Größen der Abweichungen im positiven und negativen Bereich zeigt. Während *T*, *U*, *e* und *a* eine gute Uebereinstimmung zeigen, ist die Unsicherheit von i, Ω und ω befremdend. Jedoch haben die beiden Bahnverbesserungen gezeigt, daß kleine Reste erhebliche Aenderungen gerade dieser Elemente hervorrufen, und umgekehrt wird eine weiter unten aufzuführende Ephemeride erkennen lassen, daß die starken Unterschiede von i, Ω und ω in beiden Systemen

nur Aenderungen in den Positionen von der Größenordnung von Beobachtungsfehlern zur Folge haben. Es bestätigt dies das eben Gesagte, daß die auf beide Systeme gegründeten $p_B - p_R$ nicht zu erkennen gestatten, welchem der beiden Systeme der Vorzug zu geben ist.

Durch die Durchrechnung der drei Methoden dürfte gezeigt sein, daß die Bearbeitung eines so engen Systems, wie es $O \Sigma$ 208 ist, dessen Beobachtungen naturgemäß unsicher sein müssen, ohne graphische Unterlagen nicht rätlich ist. Sie bieten die einfachste Gewähr dafür, daß die durch die graphisch aufgezeichneten Beobachtungen hindurchgelegte Kurve zweiten Grades eine den Flächensatz erfüllende Ellipse ist. Es bedarf zur Konstruktion der graphischen scheinbaren Bahn keines vorher ausgeglichenen Materials, Homogenität der Beobachtungen ist keine grundlegende Bedingung. Ein sofortiges Aufzeichnen der heterogenen Messungen kann zwar die Auffindung der richtigen scheinbaren Bahn erschweren, aber nicht unmöglich machen. Anders bei einem rein analytischen Verfahren. Hier kann der Versuch scheitern, durch heterogenes Material eine Ellipse hindurchzulegen, die Kurve kann ein anderer Kegelschnitt werden. Gestatten es die Beobachtungen überhaupt, analytisch vorzugehen, so müßte man jedenfalls vorher versuchen, die Messungen durch Aufstellung einer sich über den ganzen Beobachtungszeitraum erstreckenden oder, falls man dabei bis zu hohen Zeitpotenzen gehen müßte, mehrerer für Teilintervalle gültigen Interpolationsformeln zu homogenisieren. Die durch die erforderlichen Ausgleichungen bedingte Mehrarbeit dürfte aber so groß sein, daß man die graphische Approximation der Beobachtungen durch eine Ellipse vorziehen wird.

Schwieriger ist die Frage zu beantworten, für welche der auf graphischen Unterlagen aufgebauten Methoden, speziell für welche der beiden hier vorgeführten man sich entscheiden soll. Ist die scheinbare Ellipse als genügend durch die Beobachtungen gesichert zu betrachten, so gibt die Methode von Zwiers am raschesten alle sieben Elemente. Trifft dies hingegen infolge ungünstiger Beobachtungsverteilung nicht zu, dann empfiehlt sich das Verfahren von Klinkerfues, das, wie ich mich versuchsweise überzeugt habe, selbst bei ziemlich unrichtigen Annahmen für T, U und e mittels dreistelliger Rechnung unter Verwendung genügend starker Inkremente rasch brauchbare Werte zu finden gestattet.

Als Nebenergebnis mag noch die Ermittlung systematischer Fehler mitgeteilt werden, die aus den oben gegebenen, für Positionswinkel auf den größten Kreis reduzierten Abweichungen

zwischen Beobachtung und Rechnung für solche Beobachter, von denen mindestens vier unter gleichen Verhältnissen gewonnene Jahresmittel zur Verfügung standen, errechnet wurden. Die Zusammenstellung, die vor den Korrektionen mit ihren mittleren Fehlern die Distanz gibt, für die die Fehler gelten, läßt erkennen, wie unsicher die systematischen Fehler sind und wie sehr diese Art ihrer Ermittlung relativ zu einem mittleren durch den Durchschnitt aller verwandten Messungen wiedergegebenen Beobachter von der Sicherheit der Bahnbestimmung abhängt.

Beobachter	ϱ	Zwiers	ϱ	Klinkerfues
	"	° " "	"	° " "
O. Struve 1843—1853	0.44	+2.01±0.68 +0.024±0.017	0.42	+4.25±0.74 +0.010±0.017
O Struve ab 1853	0.30	−5.13±1.61 +0.007±0.009	0.30	+0.57±1.61 −0.003±0.009
Mädler	0.45	−5.11±1.47 +0.109±0.027	0.44	−3.45±1.25 +0.097±0.027
Aitken	0.33	+2.19±0.91 +0.018±0.008	0.36	+2.33±1.18 +0.045±0.010
Comstock	0.30	−1.43±1.29 −0.022±0.012	0.33	−0.38±1.02 +0.008±0.012
Bryant	0.33	−3.14±0.77 +0.030±0.011	0.36	−3.05±0 62 +0.058±0.011
v. Biesbroeck	0.38	+1.02±1.08 −0.015±0.016	0.40	−0.01±1.02 +0.007±0.017

Ein Vergleich der Positionswinkelkorrektionen mit den der graphischen Interpolationskurve der Positionswinkel ebenfalls ungefähr entnehmbaren systematischen Abweichungen der Beobachter zeigte eine größere Uebereinstimmung zwischen letzteren und den nach Klinkerfues errechneten als zwischen ihnen und den nach Zwiers' gefundenen Korrektionen.

Ich gebe zum Schluß eine von zwei zu zwei Jahren bis zur Epoche der Vollendung eines vollen Umlaufs gerechnete Ephemeride, getrennt für beide Elementensysteme und bezogen auf das Aequinox 1925.0.

	Zwiers		Klinkerfues	
1922.4	p = 325.41	ϱ = 0.47	p = 323.71	ϱ = 0.48
24.4	328.03	0.48	326.38	0.49
26.4	330.56	0.49	328.98	0.49
28.4	333.02	0.50	331.53	0.50
30.4	335.42	0.50	334.04	0.50
32.4	337.77	0.51	336.52	0.50
34.4	340.10	0.51	338.98	0.51
36.4	342.40	0.51	341.43	0.51
38.4	344.69	0.51	343.87	0.51
40.4	346.98	0.51	346.33	0.50
42.4	349.27	0.51	348.80	0.50
44.4	351.58	0.51	351.30	0.50

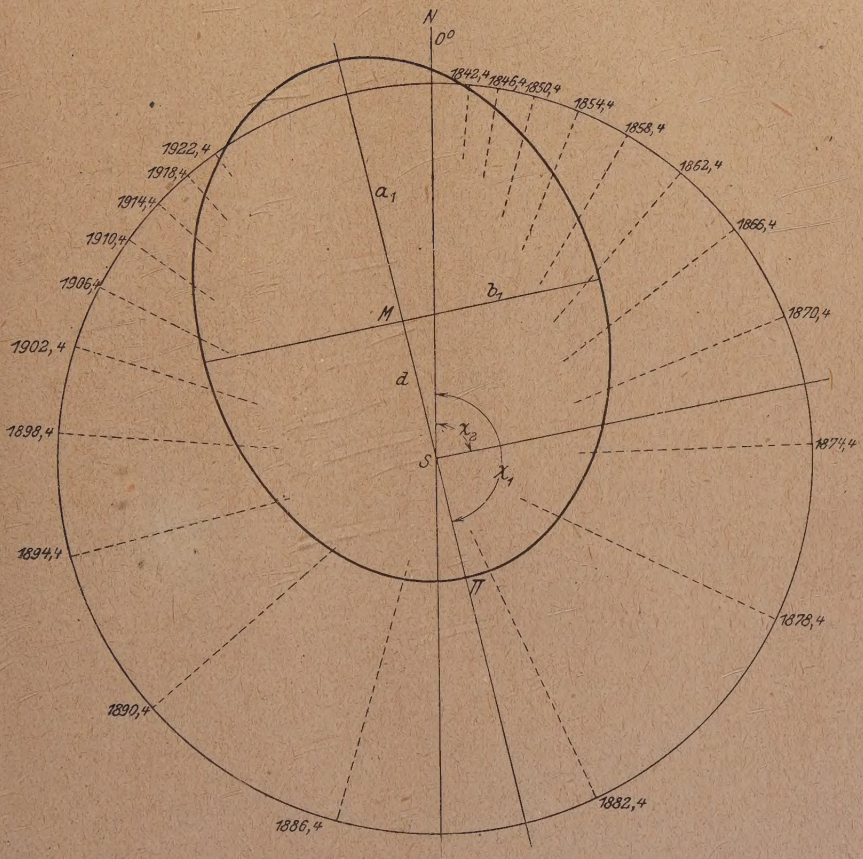
	Zwiers		Klinkerfues	
1946.4	$p = 353.92$	$\varrho = 0.51$	$p = 353.83$	$\varrho = 0.49$
48.4	356.29	0.50	356.42	0.49
50.4	358.72	0.49	359.07	0.48
52.4	1.20	0.49	1.79	0.48
54.4	3.76	0.48	4.59	0.47
56.4	6.41	0.47	7.50	0.46

Nachtrag.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Untersuchungen wurde mir die von Jackson in den »Monthly Notices of the R. A. S.«, Vol. 80, 5 (1920) veröffentlichte Bahnbestimmung von $O\Sigma$ 208 zugänglich. Auch Jackson bediente sich graphischer Unterlagen. Er glich, genau wie ich bei den Vorbereitungen zur Zwiersschen Methode verfahren bin, Positionswinkel und Distanzen aus, legte dann durch interpolierte Positionen die scheinbare Ellipse und variierte, allerdings im Gegensatz zu mir, Positionswinkel und Distanzen so lange, bis eine planimetrische Vermessung die Erfüllung des Flächensatzes bestätigte. Dieser nunmehr als gesichert anzusehenden scheinbaren Bahn entnahm Jackson fünf vollständige Beobachtungen und berechnete mit diesem Mindestmaß die fünf Koeffizienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ der Gleichung der scheinbaren Bahn. Der weitere Weg war dann der in der analytischen Methode vorgezeichnete. Jackson findet so die Elemente:

$$T = 1883.61$$
$$U = 110^{a}.1$$
$$e = 0.473$$
$$i = 32^{0}.2$$
$$\Omega = 124^{0}.6$$
$$\omega = 44^{0}.5$$
$$a = 0''.319$$
$$n = +3^{0}.268$$

Abgesehen von i, Ω und ω, deren Unsicherheit bereits hervorgehoben wurde, besteht eine gute Uebereinstimmung zwischen diesen Elementen und den von mir gefundenen, zumal Jackson von einer wahrscheinlichen Unsicherheit seines Wertes für U um zwei oder drei Jahre spricht.



φ Urs. maior.

20 Millimeter = 0."1.

Lebenslauf.

Ich, Julius Hermann Gustav Dick, bin am 4. Dezember 1891 zu Mannheim (Baden) als Sohn des Kaufmanns Hermann Dick und seiner Ehefrau Therese, geb. Steidle, geboren. Ich bin evangelischer Konfession. Von meinem 6. bis 9. Lebensjahre besuchte ich die Adlerflycht-Realschule zu Frankfurt a. M., von Ostern 1901 ab das dortige Lessing-Gymnasium, das ich Ostern 1910 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich bezog darauf die Universität Heidelberg, um Astronomie, Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren. Michaelis 1912 vertauschte ich zu gleichem Studium Heidelberg mit Berlin. Bald nach Kriegsausbruch trat ich in den Heeresdienst und wurde im Felde zum Reserveoffizier befördert. Nach meiner mit der Demobilmachung erfolgten Entlassung war es mir infolge der Besetzung meiner linksrheinischen Heimat nicht sofort möglich, meine Studien wieder aufzunehmen, erst im Herbst 1919 kehrte ich nach Berlin zurück. Am 27. Oktober 1921 bestand ich die mündliche Prüfung.

Ich besuchte in Heidelberg und Berlin die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Dozenten: Heidelberg: Becker, Böhm, Cantor, Köhler, Koenigsberger †, Kopff, Krafft, Lenard, Pockels, Ruge, Salomon, Wolf; Berlin: Blasius, Cohn, Guthnick, Hettner †, Knoblauch †, Knopp, v. Mises, Planck, Riehl, Rubens †, E. Schmidt, Schottky, Schwarzschild †, Struve †, Stumpf, Wehnelt, Witt. Allen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geh. Rat Cohn, der mir die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen gab, fühle ich mich zu tiefstem Danke verpflichtet.

Buchdruckerei A. W. Schade, Berlin N 39, Schulzendorferstr. 26.